

【2021國科學探究競賽-這樣教我就懂】 國中組 成果報告表單

題目名稱: 因錯陽差倍水戰

一、摘要:

我們這組在一次的段考題目中發現了靈感，並著手延伸探究此題目。為了方便探討其中的奧妙，我們製作了一款桌遊來幫助我們思考相關問題。在研究分析中，我們發現比該數字小的質數個數會影響遊戲的結果。像是：10包含自己以內的質數共有4個，因此先手勝利；12包含自己以內的質數共有5個，後手勝利，20以內的質數有8個，先手勝利等等...，經過的1~20反覆驗證之後，我們發現當數字包含自己內有奇數個質數時，便是後手勝，反之，當此數字包含自己內有偶數個質數時，則是先手勝利。我們期望經由這次的研究，能讓大家更積極於探究數學遊戲，解析必勝法，並透過趣味使數學能力更加精進。

二、探究題目與動機

在110學年我們學校第二次段考數學科的最後一題，是一個關於邏輯推理的桌遊題目。全班的同學都百思不得其解，或是無法清楚的解釋其中的概念。雖然這道題目非常具有挑戰性，但在我們努力不懈的研究下，終於找出此桌遊的規律性與必勝法。

「因錯陽差倍水戰」桌遊規則：

1. 首先有 n 個數字的牌(1~ n)， n 為正整數，先手先拿牌
2. 假設先手拿到 a 牌後，就必須拿走 a 牌的因數和倍數 (a 為1~ n 中的數)
3. 接著將拿走的牌放進棄牌堆中，棄掉的牌在此局中就不會再被使用到
4. 將最後一張牌抽掉的玩家則輸掉遊戲
5. 兩位玩家輪流進行1~3的步驟，一直到最後一張牌被抽到為止

舉例：後手贏

1. 設 $n=5$ ，先手選2，因此拿1、2及4的牌
2. 剩下3與5，後手選3，剩下5
3. 先手只能選5，所以後手勝利

舉例：先手贏

1. 設 $n=10$ ，先手選3，因此拿1、3、6及9的牌
2. 剩下2、4、5、7、8、10，後手選2，剩下5、7
3. 先手選5，後手選7，先手贏

三、探究目的與假設

我們研究的目的是要掀開這款桌遊的神秘面紗，探討其中的奧妙，使大家都能融入在微妙的數理世界之中。我們的假設是先手必贏，因為先手有決定先抽哪一種牌的優勢，而且通常遊戲都是先手有利，例如：圍棋、五子棋、圈圈叉叉、國際象棋、搶30、西洋棋...等等。所以我們的假設是先手必贏。

四、探究方法與驗證步驟

因為考試時題目設 n 為20，所以我們先以考試的題目來進行探究。

可以一次拿最多牌的卡是「1」，但先手拿「1」就會輸掉遊戲，所以我們以可拿第二多牌的數「2」來研究

首先，為保證實驗的結果為若非必勝及必敗，所以必須考慮後手的所有拿法，並且先手只下最佳下法。

$n=20$ 的情況下

先手拿2，則必須拿掉所有偶數牌以及1

也就是剩下3/5/7/9/11/13/15/17/19

可把這些數分為兩類：

第1類-沒有倍數在內的質數為7/11/13/17/19

第2類-合數或有倍數在內的質數為3/5/9/15

接著拿第1類數字，這類數字都只能一個一個拿，所以拿光第1類數字的人是後手。

如果遊戲剩下「第2類的數字」，先手會先拿，以下有幾種可能：

- 1.先手選3，拿3/9/15，剩5，後手只能拿5，先手必贏。
- 2.先手選5，拿5/15，剩3/9，3/9有因倍關係，後手只能全拿，先手必贏。
- 3.先手選9，拿3/9，剩5/15，5/15有因倍關係，後手只能全拿，先手必贏。
- 4.先手選15，拿3/5/15，剩9，後手只能拿9，先手必贏。

再舉一個例子

如果 $n=12$

1.先手拿2後剩下:3/5/7/9/11

分成將剩下的數字分為兩類數字

第一類數字:5/7/11

第二類的數字有:3/9

有四種組合分別是:3和9、5、7、11

接著換後手拿一種組合,再換先手拿一種組合,再換後手拿一種組合,最後先手拿走最後一種組合。先手就輸了。

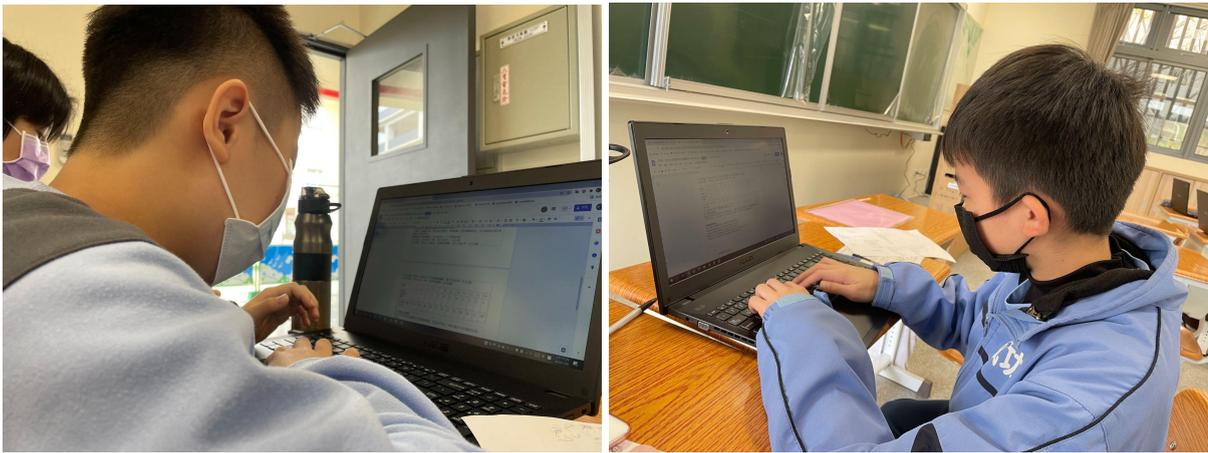
在 $n=12$ 時,我們發現將遊戲分為第1類及第2類的數字後,第1類的數字必為一個一個單獨拿走,而第2類的數字一次會拿很多個,也就是說,若先拿光第2類數字,則開始拿第1類數字的玩家必為先手。

所以質數和先後手勝利有關係,請看下列表格說明

以下是總牌數不同的情況下,數字內的質因數個數以及勝利的玩家

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
數字內質數個數	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	8
先手贏/ 後手贏	後	後	先	先	後	後	先	先	先	先	後	後	先	先

由上述表格可知道,比該數還小的質數數量為偶數者代表先手必贏,反之,質數數量為奇數則先手必輸。



(打報告的圖片)

五、結論與生活應用

結論:我們發現若該數字為 n (n 為正整數), 不管大小, n 內的質數若為偶數便是先手獲勝, 若為奇數則是後手獲勝, 然而1是例外, 它沒有任何的質數, 因此我們不列入參考範圍。破解了這個規則後, 可以在遊戲前就事先知道輸贏, 也就是必勝。透過這個遊戲, 讓我們充分瞭解因倍數的基本概念, 增強數學能力, 也增加生活中的樂趣。

參考資料

#110學年度第二次數學段考非選題第四題
#<https://kknews.cc/zh-tw/sports/8kq2oxe.html>
#<https://www.getit01.com/p20171214103594/>
#https://en.wikipedia.org/wiki/First-move_advantage_in_chess
#<https://sciexplore.colife.org.tw/work-list.php?g=2>