2022 年【全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

教師組 教案表單與學習單

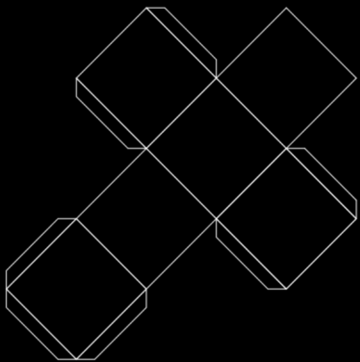
教案設計者：陳威整
課程領域：
□物理 □化學 □生物 □地球科學 ■數學 ■其他 科技、藝術
教案題目：
紙趣閣 STEAM 教育①：從宇宙魔方到柏拉圖多面體
授課時數：
至少 10 節(500 分鐘)
教案設計理念與動機：
生活中的很多形體是靠人類創造出來的，但是我們存在空間中，對於立體幾何的認識卻有限。於是筆者在學校開設 108 課綱多元選修課程，向學生介紹各種多面體的形狀，希望推廣讓更多的學生能對我們存活的空間多一些基本的認識。本教案從最簡單的正立方體開始，希望透過先備的經驗搭起學生習得正多面體邊角關係的鷹架，並應用在相關情境。
教學目標：
認知：本教學活動透過本質的探討各種正多面體的構成方法，從中了解各種正多面體的結構組成。 情意：透過動手實作折紙模型，建立看得到的形體與圖案，連結數學與身體感官，進而喜歡數學。 技能：從了解各種正多面體的幾何量，進而應用於各種跨領域的生活情境中，與 STEAM 教育結合。
教育對象：
高中二年級、三年級學生
課程設計（方法與步驟）：
本課程以實作出發，透過一系列的折紙模板讓學生完成手掌大小的成品(Engineering)。希望透過這種“以終為始”的課程設計引起動機。用學生已知的正立方體與黃金比例為鷹架，搭配免費軟體 GeoGebra 的使用將各種正(柏拉圖)多面體建構出虛擬的造型(Science)。當立體造型完成後，可以探討體積的分解(或合成)，實現資訊融入數學的教學。也能經由 3D 列印(Technology)完成實體作品。而 GeoGebra 也能繪製平面展開圖，然後輸出為紙板。學生透過實際動手製作各式正多面體幾何模型，然後觀察與理解背後的數學原理，將代數與幾何(Mathematics)完美的結合，體會數學中的真、善、美，培養美感與創造力(Art)。在三角比的脈絡中延展國中的空間概念至正多邊形的面積與正角錐體的體積計算。利用計算機的反三角鍵估算兩面角，學習空間中兩面角、三角函數公式的運用。學生能透過數學原理、運用資訊科技創作各種多面體造形、顏色或線條(甚至光影)，動手打造屬於自己的作品。也能與生活情境結合，培養跨領域實際解決問題的能力與態度。

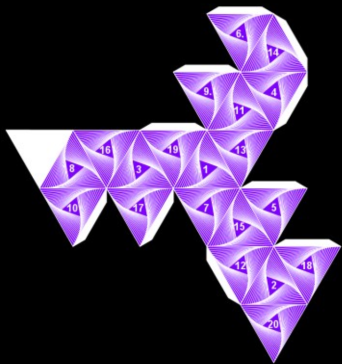
壹、頂點法(用正立方體)

一、引起動機：

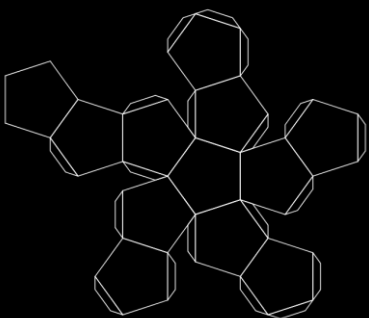
1. 介紹生活中的正多面體，例如 MF8 正 20 面體魔術方塊為正 20 面體，迪卡儂新竹店門口的遊樂設施為正 12 面體。

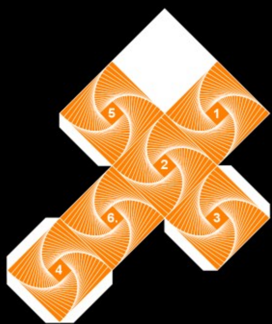
2. 動手實作正 20 面體、正 12 面體折紙模型教具


正立方體展開圖透明片


正 20 面體展開圖紙板


正 20 面體成品


正 12 面體展開圖透明片


正立方體展開圖紙板


正 12 面體成品

3. 介紹黃金矩形、黃金三角形與黃金比例

黃金比例又稱黃金分割率，一般以希臘字母ϕ表示。
可以用以下代數式定義：

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

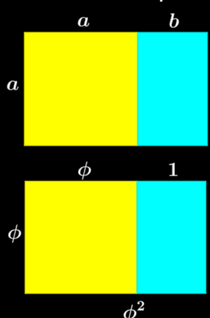
$$1+\frac{1}{\phi}=\phi$$

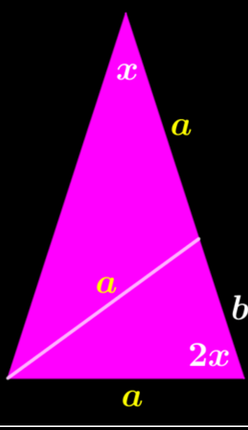
$$\phi^2-\phi-1=0$$

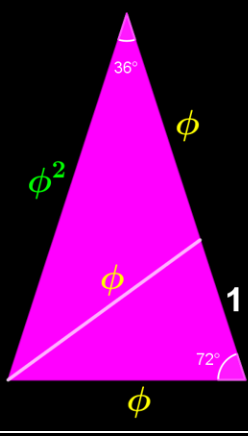
$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618\cdots$$

$$\phi-1=\frac{1}{\phi}\approx 0.618\cdots$$

$$\phi^2=\phi+1\approx 2.618\cdots$$

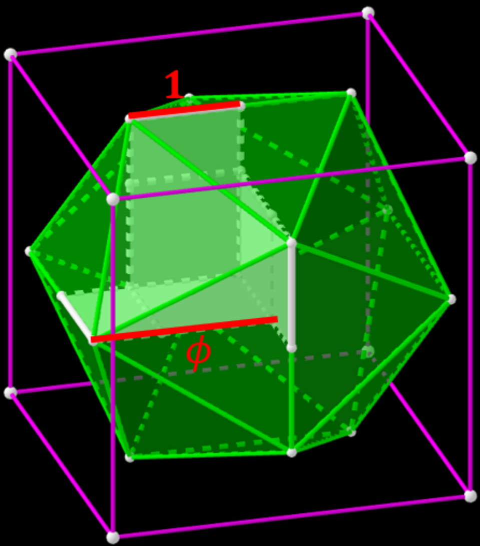




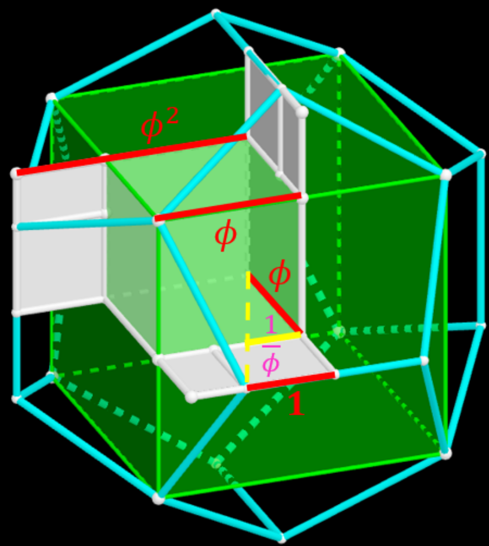


二、工具的使用

1. 說明數學軟體 GeoGebra 的使用：透過 GeoGebra 軟體，利用正立方體與黃金比例描繪正 20 面體與正 12 面體。

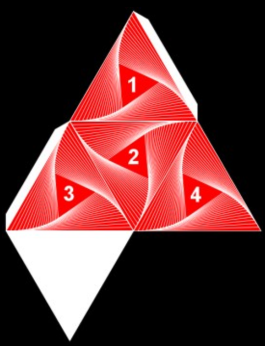


正立方體與正 20 面體邊長的黃金比例關係

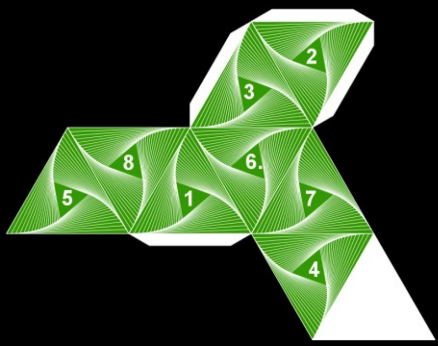


正立方體與正 12 面體邊長的黃金比例關係

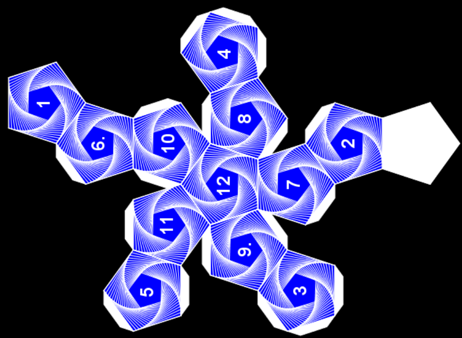
2. 介紹[正多面體(Platonic Solids)]，並且完成可觀察的折紙模型實體



正四面體展開圖紙板



正八面體展開圖紙板



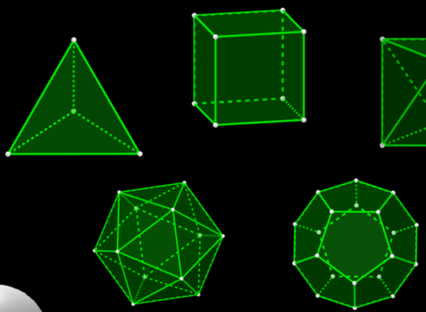
正 12 面體展開圖紙板

Engineering

折紙藝數工程(Origami Art)

貳、利用正立方體建構其他的正多面體

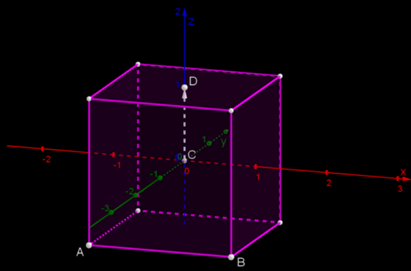
透過 GeoGebra 只要利用簡單的正立方體與黃金比例，就能構造所有的正多面體



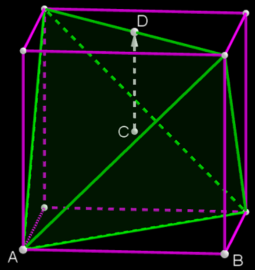
Science

電腦軟體科學(GeoGebra)

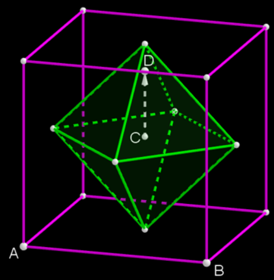
1.繪製正立方體
(1) A = (-1, -1, -1), B = (1, -1, -1)
(2) 向量u=C(0,0,0)到D(0,0,1)
(3) Cube(A, B, u)產生正立方體



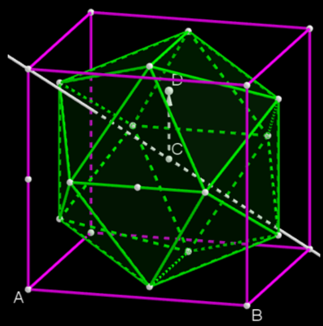
2.繪製正四面體
(1) A = (-1, -1, -1), B = (1, -1, -1)
(2) 向量u=C(0,0,0)到D(0,0,1)
(3) Cube(A, B, u)產生正立方體
(4) 在8個頂點中找距離相等的4個相連，即為正四面體

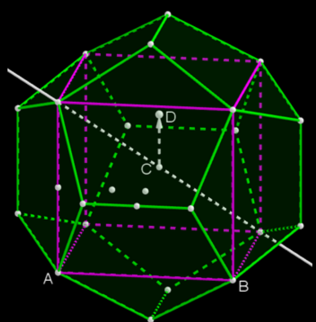


3.繪製正八面體
(1) A = $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, B = $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
(2) 向量u=C(0,0,0)到D(0,0,1)
(3) Cube(A, B, u)產生正立方體
(4) 作6個面的中心，並連接相鄰的頂點，即為正八面體



4.繪製正20面體
(1) 黃金比例$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(2) A = $(-\phi, -\phi, -\phi)$,
B = $(\phi, -\phi, -\phi)$
(3) 向量u=C(0,0,0)到D(0,0,1)
(4) Cube(A, B, u)產生正立方體
(5) 由稜心往隔壁面心內縮為$\frac{1}{\phi}$倍，
此點對面心作點對稱，
兩點再對體心作點對稱，
四點對最長對角線旋轉120°兩次，
連接相鄰的12個頂點即得
(操作畫面請參閱教學影片)

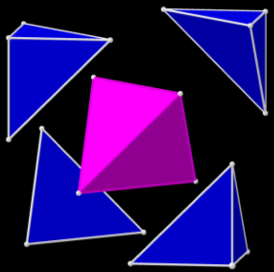


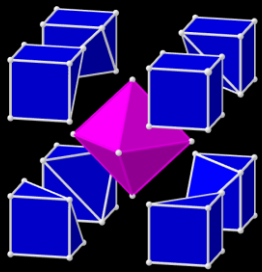


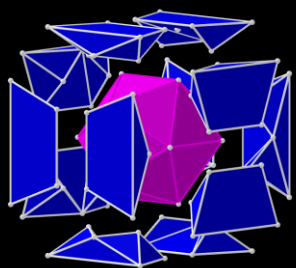
5.繪製正12面體
(1) 黃金比例$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(2) A = $(-\phi, -\phi, -\phi)$,
B = $(\phi, -\phi, -\phi)$
(3) 向量u=C(0,0,0)到D(0,0,1)
(4) Cube(A, B, u)產生正立方體
(5) 由面心往隔壁一對稜心內縮為$\frac{1}{\phi}$倍，
再對體心伸長為ϕ倍，得兩頂點。
此兩點對體心作點對稱，
四點對最長對角線旋轉120°兩次，
連接相鄰的20個頂點即得
(含正立方體的8個頂點)
(操作畫面請參閱教學影片)

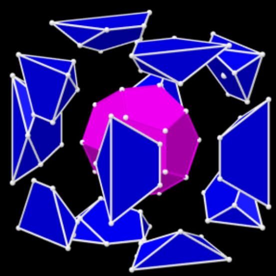
參、體積加(減)法

利用 GeoGebra，在電腦上探討正立方體與其他四種正多面體的關係：


正立方體中的正四面體


正立方體中的正八面體

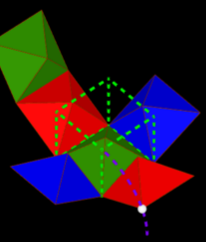

正立方體中的正 20 面體

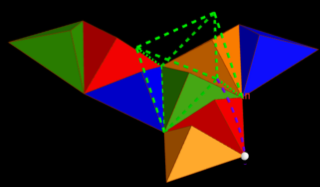

正立方體中的正 12 面體

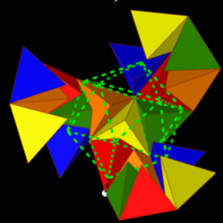
肆、體積乘(除)法

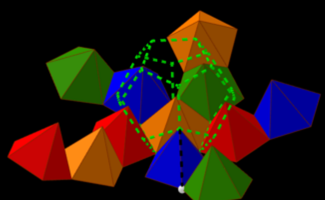
利用 GeoGebra，在電腦上探討利用角錐體積公式計算五種正多面體的體積：


P1. 正四面體(Tetrahedron)


P2. 正六面體(Hexahedron)


P3. 正八面體(Octahedron)

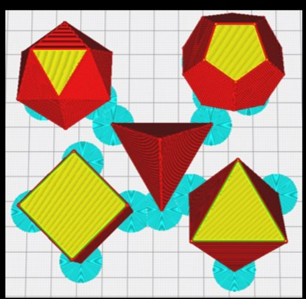

P5. 正二十面體(Icosahedron)

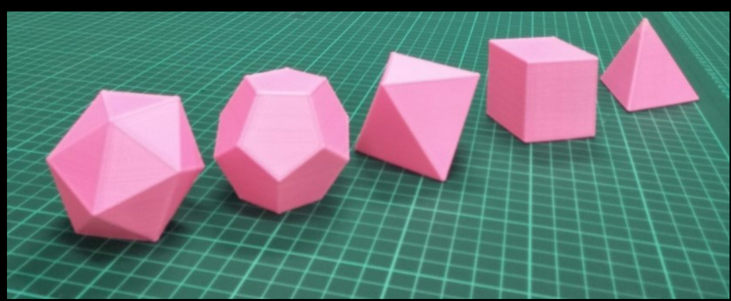

P4. 正十二面體(Dodecahedron)

學習評量內容

A. 3D 列印

透過轉檔，GeoGebra 產生的檔案可以輸出為 stl 檔，就可以 3D 列印了。





Technology

機械製造科技(3D列印)

B. 藝術燈與藝術裝置

當然透過設計，也能把正多面體應用在燈具與裝置藝術的造形上。

Art

藝術設計

C. 正多面體的幾何量計算

運用適當的圖形縮放比例，可以比較容易計算出各種正多面體的幾何量：

Math

數學原理

1. 正六面體(Hexahedron)

兩面角$\boldsymbol{\theta} = 90°$

令稜長2

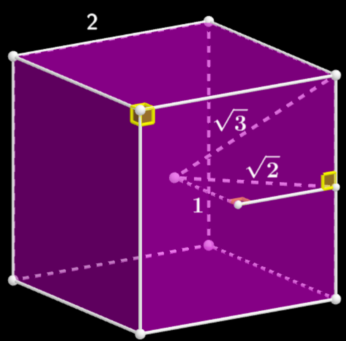
則內切球半徑$r = 1$

稜中點球半徑$\boldsymbol{\rho} = \sqrt{2}$

外接球半徑$\mathrm{R} = \sqrt{3}$

表面積$\mathrm{S} = 6 \cdot 4 = 24$

體積$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{Sr}}{3} = 8$　　$\frac{\text{角柱體積}}{3}$=角錐體積



2. 正四面體(Tetrahedron)

令正四面體稜長$2\sqrt{2}$

兩面角$\boldsymbol{\theta} \Rightarrow cos\boldsymbol{\theta} = \frac{6+6-8}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{3}$

餘弦定理

$\Rightarrow \boldsymbol{\theta} = cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.53°$

則稜中點球半徑$\boldsymbol{\rho} = 1$

外接球半徑$\mathrm{R} = \sqrt{3}$

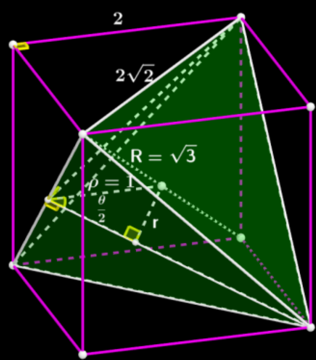
半角公式

$$sin\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\boldsymbol{\theta}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

內切球半徑$r = \rho \cdot sin\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

表面積$\mathrm{S} = 4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

體積$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{Sr}}{3} = \frac{8}{3}$　　$\frac{\text{角柱體積}}{3}$=角錐體積



3. 正八面體(Octahedron)

令正八面體稜長2

則外接球半徑R= $\sqrt{2}$

稜中點球半徑$\boldsymbol{\rho}=1$

兩面角$\boldsymbol{\theta} \Rightarrow \cos\boldsymbol{\theta}=\frac{3+3-8}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$

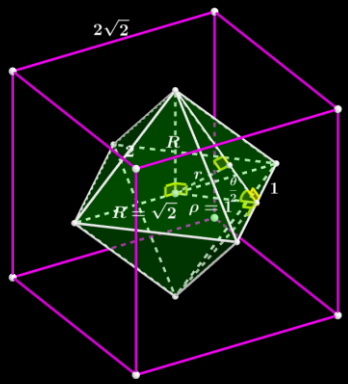
餘弦定理

$\Rightarrow \boldsymbol{\theta}=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\approx 109.47°$

內切球半徑$r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$(面積法)$=\frac{\sqrt{6}}{3}$

表面積S $=8\cdot\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

體積V $=\frac{Sr}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$



4. 正 20 面體(Icosahedron)

令正20面體稜長2

則稜中點球半徑$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\phi}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

兩面角$\boldsymbol{\theta} \Rightarrow \cos\boldsymbol{\theta}=\frac{3+3-(2\phi)^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6-(6+2\sqrt{5})}{2\cdot 3}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

餘弦定理

$\Rightarrow \boldsymbol{\theta}=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\approx 138.19°$

外接球半徑R $=\sqrt{1+\phi^2}=\sqrt{2+\phi}$

$=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

$\sin\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\boldsymbol{\theta}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{12}}$

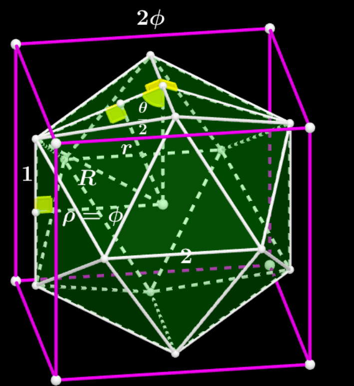
$=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

內切球半徑$r=\boldsymbol{\rho}\cdot\sin\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}$

$=\frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{12}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

表面積S $=20\cdot\sqrt{3}=20\sqrt{3}$

體積V $=\frac{Sr}{3}=\frac{30+10\sqrt{5}}{3}$



5. 正 12 面體(Dodecahedron)

令正12面體稜長2

則稜中點球半徑$\boldsymbol{\rho}=\phi^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,其中$\boldsymbol{\phi}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

兩面角$\boldsymbol{\theta} \Rightarrow \cos\boldsymbol{\theta}=\frac{2(\phi^2+\phi^4)-(2\phi^2)^2}{2\cdot(\phi^2+\phi^4)}=\frac{(1+\phi^2)-2\phi^2}{(1+\phi^2)}$

餘弦定理

$=\frac{-\phi}{2+\phi}=-\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\theta}=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\approx 116.57°$

外接球半徑R $=\sqrt{3}\phi=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$

$\sin\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\boldsymbol{\theta}}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

內切球半徑$r=\phi^2\sin\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}=\frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{2}\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

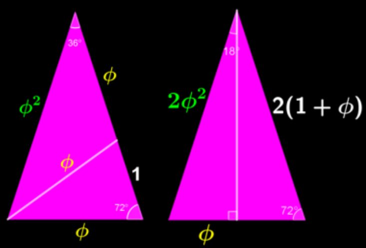
$=\frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{2}\cdot\sqrt{\frac{25+5\sqrt{5}}{25}}=\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{10}$

$\sin 18°=\frac{1}{2\phi}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

平方關係

$\cos^2 18°=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$

$\cos 18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$



↙

表面積S $=12\cdot 5\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\sin 72°}_{\Delta\text{面積公式}}$

$=12\cdot 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{25+11\sqrt{5}}{10}\right)\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

餘角關係

$=15\cdot\left(\frac{20+4\sqrt{5}}{10}\right)\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

$=3\cdot(5+\sqrt{5})\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$=3\sqrt{30+10\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$=3\sqrt{400+160\sqrt{5}}$

$=12\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

體積V $=\frac{Sr}{3}=4\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{10}$

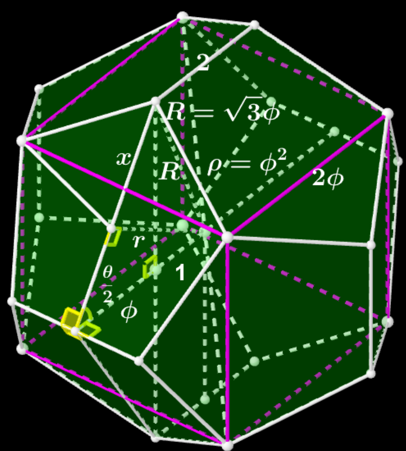
$=2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{50+22\sqrt{5}}$

$=2\sqrt{470+210\sqrt{5}}$

$=2\sqrt{(\sqrt{225}+\sqrt{245})^2}$

$=2(15+7\sqrt{5})$

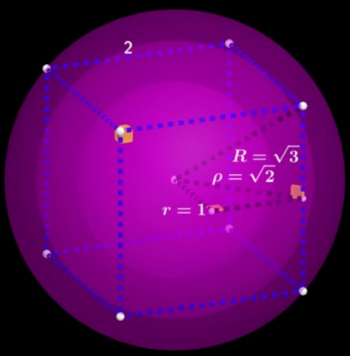
$=30+14\sqrt{5}$



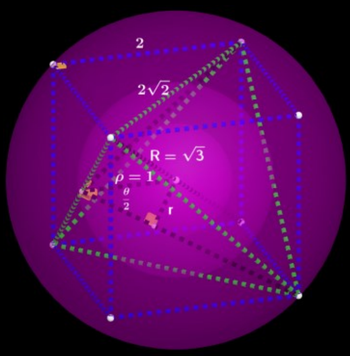
6. 各種半稜長為 1 的正多面體的幾何量

名稱	兩面角 θ	外接球半徑R	稜中點球半徑ρ	內切球半徑r	表面積 S	體積 V
正六面體	90°	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	24	8
正四面體	$cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$4\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
正八面體	$cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$8\sqrt{3}$	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$
正二十面體	$cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$	$20\sqrt{3}$	$\frac{30+10\sqrt{5}}{3}$
正十二面體	$cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{10}$	$12\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$30+14\sqrt{5}$

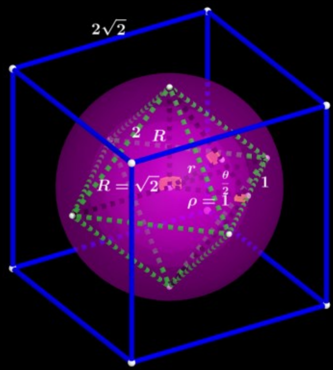
數缺形時少直覺，形少數時難入微，數形結合百般好，隔離分家萬事休。(~華羅庚)



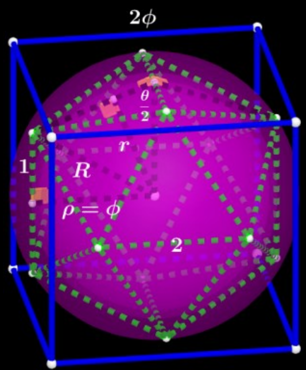
正立方體(Hexahedron)



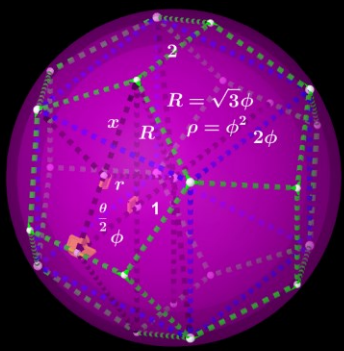
正四面體(Tetrahedron)



正八面體(Octahedron)



正 20 面體(Icosahedron)



正 12 面體(Dodecahedron)

折紙學數 S 幾何軟體
E M T
藝術創作 A 3D列印

參考資料：

1. GeoGebra 軟體下載，請見官網：https://www.geogebra.org/
2. 柏拉圖立體：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9F%8F%E6%8B%89%E5%9C%96%E7%AB%8B%E9%AB%94
3. 十二年國民基本教育藝術領域高中階段—《就是那道光！-「燈」的設計思考》教師手冊：http://epublish.hyweb.com.tw/NICT/search_detail.jsp?sysid=20000189