

標題:錐動擺之研究

作者 陳峙銑

◎ 目錄

一、緒論前言.....	P.2
二、研究目的.....	P.2
三、研究過程與結果.....	P.4
(一)實驗一：手動錐動擺.....	P.4
(二)實驗二：利用人工測量電動錐動擺－雙滑輪.....	P.6
(三)實驗三：利用人工測量電動錐動擺－單滑輪.....	P.8
(四)實驗四：利用 PASCO、音效卡測量電動錐動擺－雙滑輪...P.11	
(五)實驗五：利用 PASCO、音效卡測量電動錐動擺－單滑輪...P.13	
(六)實驗六：模擬雙星運動.....	p.14
四、結論.....	P.16
五、參考資料.....	P.16
六、附錄：實驗圖片.....	p.18

◎ 緒論前言

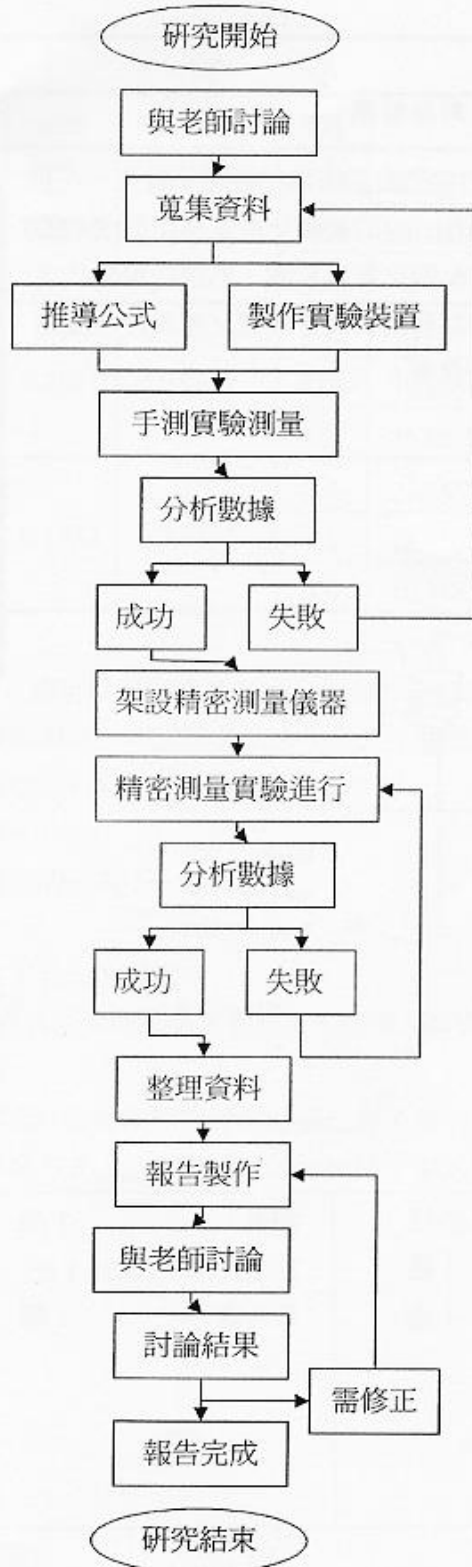
錐動擺是一種被擺線綁住的物體，所作之等速圓周運動的現象。當物體進行圓周運動時，會受到擺線拉力與重力作用，而形成錐狀的運動範圍。在生活當中，錐動擺的例子時常可見，像是西部牛仔在進行繩索拋射時，就有形成所謂的錐動擺。

在高中的物理課程中，我們時常會做到一些有關於錐動擺的題目。學校老師也推導過許多有關於錐動擺的公式。但是，錐動擺在形成時，擺線張力、擺錘質量大小、旋轉速率、週期、半徑大小、向心加速度之間，真的有如教科書上所敘述的那樣嗎？他的其中，究竟隱藏了什麼奧妙呢？這一切的總總，都驅使我們想要進行深入探討。

◎ 研究目的與步驟

- (一)觀察錐動擺，於形成圓周運動時，測量
 - 1.張力、長度
 - 2.轉半徑、速度、向心加速度
 - 3.重物質量之間之相對關係
- (二)推導錐動擺公式，熟練計算錐動擺之理論值
- (三)深入進行複雜探討，並製作精密之電動錐動擺。
- (四)比較理論值與實驗值之誤差，找出誤差之因素，並改善實驗裝置與測量法。
- (六)模擬雙星運動，進行不同質量擺錘以及等質量擺錘的雙星模擬。

實驗流程圖



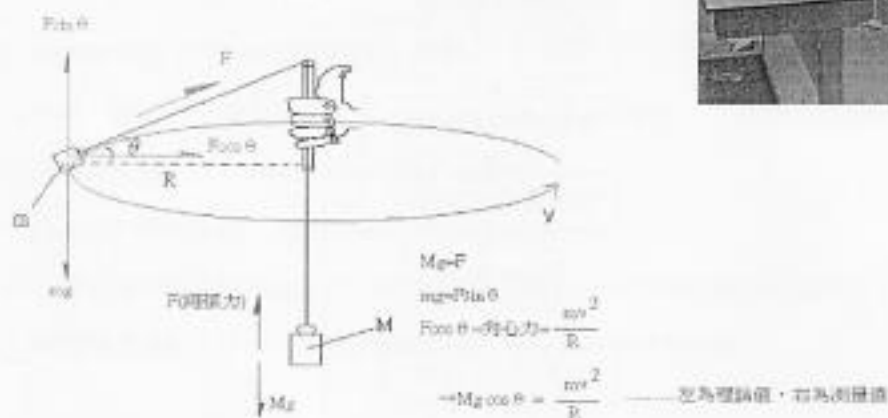
◎ 研究過程與結果

實驗一 利用人工測量手動錐動擺

先以研究筆管裝置的手動錐動擺為出發點。首先，先推導理論公式，計算錐動擺在一定的旋轉半徑下，所形成的固定轉速，週期。以手動錐動擺之實驗裝置，熟練理論公式之運算，並且測量週期，觀察理論值與實驗值之差異性，找出誤差因素，以利下次實驗參考。



實驗公式推導



實驗器材

繩子(棉繩)	約 2 公尺	碼表	1 個	
空筆管	1 枝	刻度尺(15~20 cm)	1 把	
砝碼組	1 盒	量角器	1 個	

實驗數據

m = 0.014 kg			$\theta = 15^\circ$		$\cos 15^\circ = 0.965762$			
	M(kg)	繩長(m)	r(m)	M g cos θ	t(s)	v ²	mv ² /r	誤差值
1-1	0.05	0.3	0.2897	0.4732	4.94	13.5659	0.6555	39%
					4.54	16.0617	0.7761	64%
					3.9	21.7657	1.0517	122%
1-2	0.1	0.3	0.2897	0.9464	3.74	23.6772	1.1441	21%
					4.08	19.8954	0.9614	2%
					4.57	15.8578	0.7663	-19%
1-3	0.1	0.2	0.1932	0.9464	2.6	21.7657	1.5776	67%
					3.1	15.3107	1.1097	17%
					3.0	16.3485	1.1850	25%

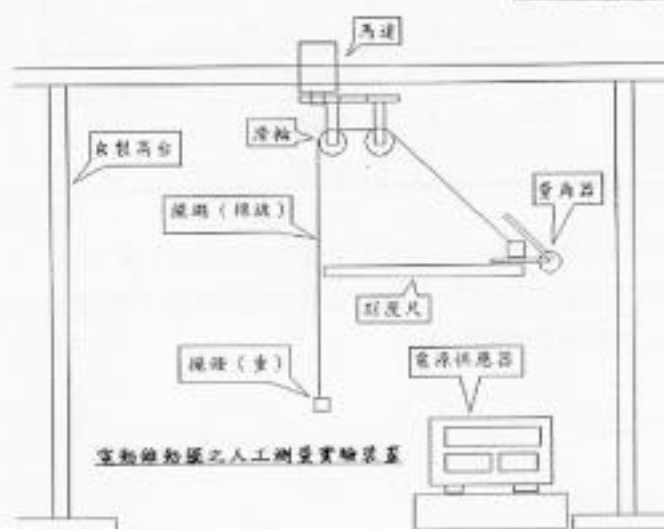
- (1) 觀察幾次的實驗數據，都可以發現誤差很大，只有一次能很湊巧的到 2% 的誤差，可是如此低的誤差出現的機率，可說是非常小，代表手動錐動擺是非常不精確的。
- (2) 我們推測導致誤差的因素，大概有下列幾點
- ① 筆管與繩的摩擦阻力。
 - ② 實驗者的手，所用出的速度不一致。
 - ③ 測量 θ 值的誤差。
 - ④ 手的不穩定，產生了其他的變因。
- (3) 這些誤差，都是導致實驗值與理論值差異很大的因素，若能改善這些誤差，應該會作出更符合理論的數據。
- (4) 雖然如此，透過這個實驗，使得我們對於錐動擺已有了最初步的了解，對錐動擺公式，也很清楚的知道了推算方式，能更有概念的作出接下來的實驗。

實驗二 人工測量電動錐動擺—雙滑輪

電動錐動擺實驗裝置，由馬達提供錐動擺旋轉之動力，利用電源供應器，控制電壓、電流，進而改變轉速，使錐動擺處於穩定，以便測量。

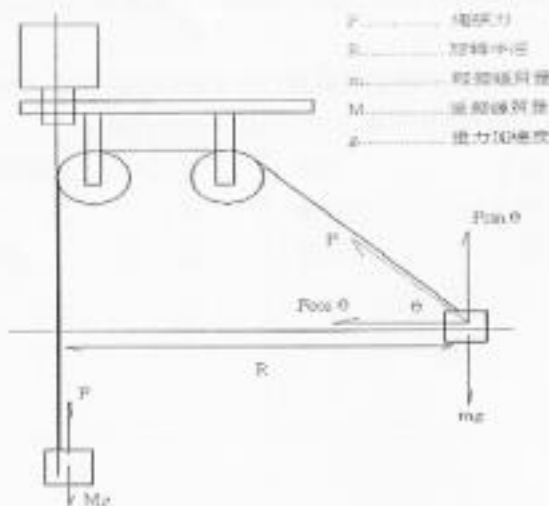


實驗裝置



利用學校器材室內的高架以及木條製作簡單的高台，在將一個馬達裝上其中央，放上載有滑輪的壓克力板，在將法碼掛上，利用電源供應器提供馬達電源。

公式推導



$$\begin{cases} F \sin \theta = mg \\ F \cos \theta = \text{向心力} \\ = \frac{m v^2}{R} = \frac{m}{R} \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m R}{T^2} \\ F = Mg \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow Mg \sin \theta &= mg \\ \rightarrow \sin \theta &= \frac{mg}{Mg} \\ \rightarrow F \cos \theta &= \frac{m v^2}{R} = \frac{m}{R} \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m R}{T^2} \end{aligned}$$

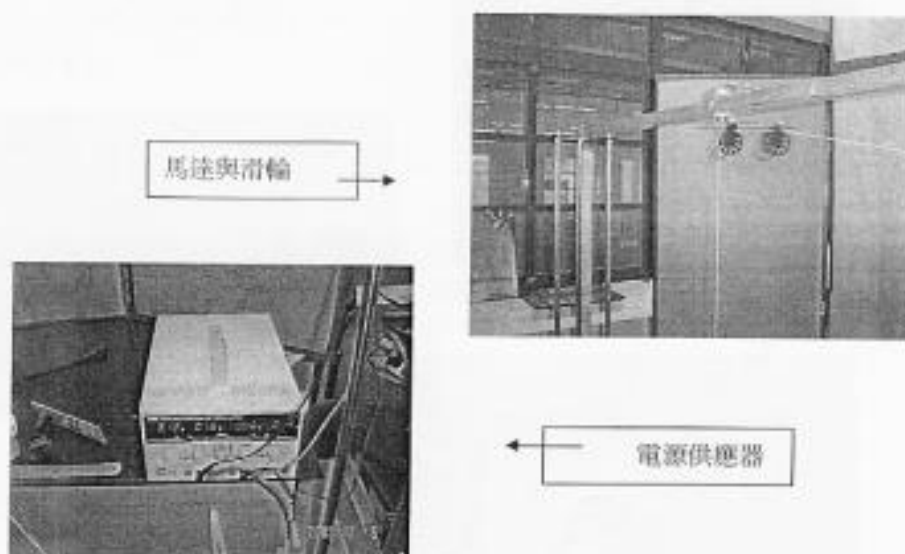
$$Mg \cos \theta = \frac{4\pi^2 m R}{T^2}$$

實驗結果

m=0.01 kg			M=0.025 kg		
	R(m)	Mgcos θ	t(s)	$4\pi^2 mR/T^2$	誤差值
1-1	0.5800	0.2300	9.25	0.2502	8.7%
			9.51	0.2530	10%
			9.52	0.2520	9.5%
1-2	0.5350	0.1980	9.63	0.2280	14.7%
			9.72	0.2330	17.3%
			9.68	0.2250	13.5%
1-3	0.5500	0.1890	9.72	0.2300	21.2%
			9.75	0.2600	37.1%
			9.68	0.2310	22.2%

雖然每一組內的誤差差距不大，可是每一組之間的誤差跳動很大，推測導致誤差的可能因素有

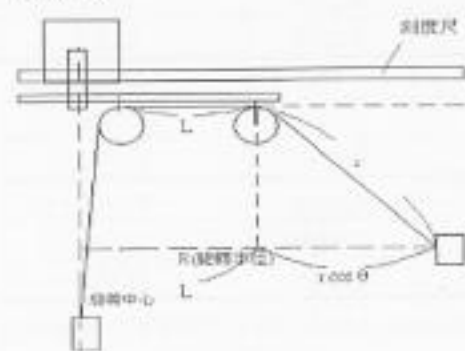
- (1) 馬達產生之轉速不穩定
- (2) R(旋轉半徑)值有誤差
- (3) 週期 T 之測量有人為的誤差



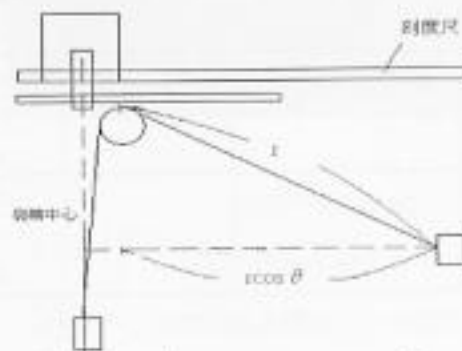
實驗三：利用人工測量電動維動器—單滑輪

爲了更進一步的探討旋轉半徑(R)與旋轉週期(T)之間的關係，我們將實驗做了一點變更，將雙滑輪改變成單滑輪，使 L 爲零(如下圖)。

公式推導



R(旋轉半徑) $=L+r\cos\theta$
若L趨近於0，則R $\approx r\cos\theta$



$$Mg\cos\theta = \frac{4\pi^2 m R}{T^2} \quad Mg\cos\theta = \frac{4\pi^2 m r\cos\theta}{T^2}$$

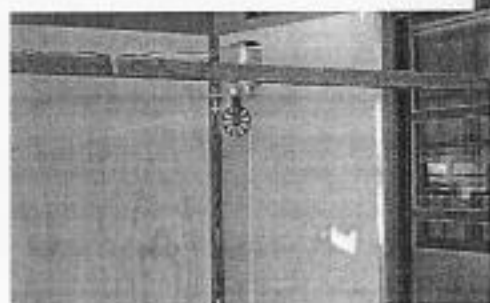
$$Mg = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} \quad \frac{r}{T^2} = \frac{Mg}{4\pi^2 m}$$

令此爲常數K

$$r = K T^2 \quad \text{發現 } r \text{ 與 } T^2 \text{ 成正比}$$



單滑輪實驗裝置

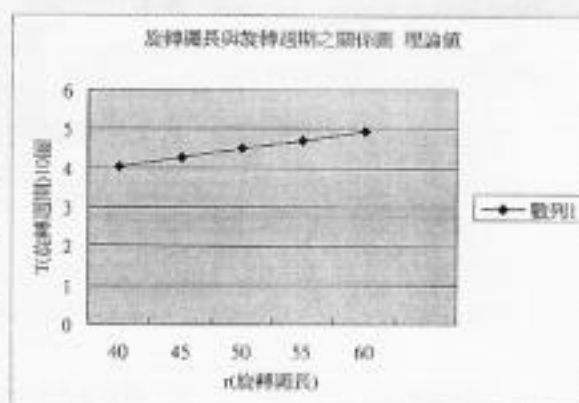


實驗結果

公式： $K = Mg/4\pi^2 m$ ，理論 $T = \sqrt{r/K}$

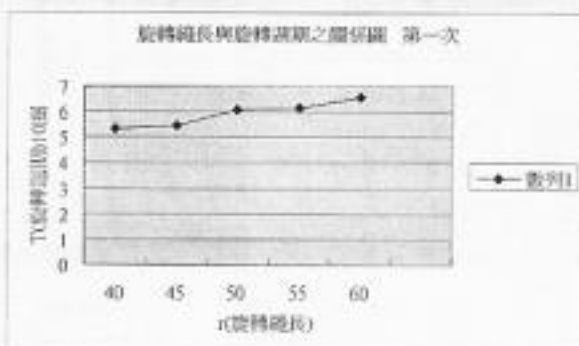
理論

r (m)	M (kg)	M (kg)	π	K	T (s/圈)
40	0.05	0.01	3.141	2.4833	4.0134
45	0.05	0.01	3.141	2.4833	4.2569
50	0.05	0.01	3.141	2.4833	4.4871
55	0.05	0.01	3.141	2.4833	4.7062
60	0.05	0.01	3.141	2.4833	4.9154



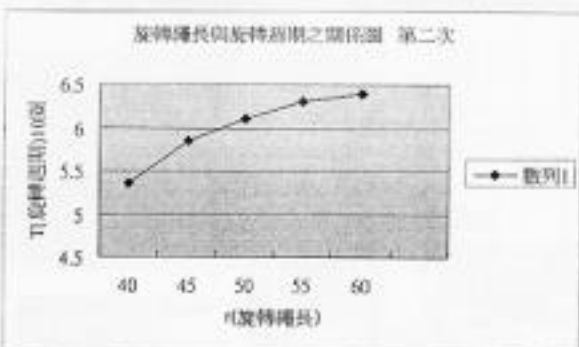
第一次實驗

r (m)	M (kg)	M (kg)	π	K	T (s/圈)
40	0.05	0.01	3.141	2.4833	5.35
45	0.05	0.01	3.141	2.4833	5.46
50	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.07
55	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.11
60	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.57



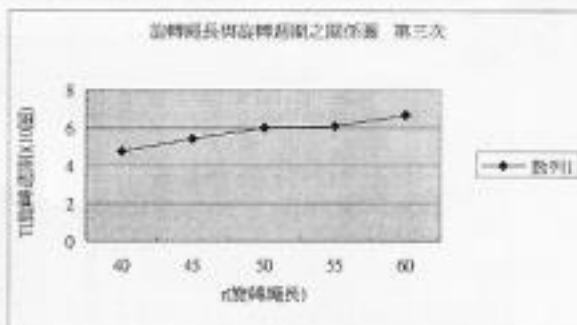
第二次實驗

r (m)	M (kg)	M (kg)	π	K	T (s/圈)
40	0.05	0.01	3.141	2.4833	5.36
45	0.05	0.01	3.141	2.4833	5.84
50	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.10
55	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.30
60	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.39



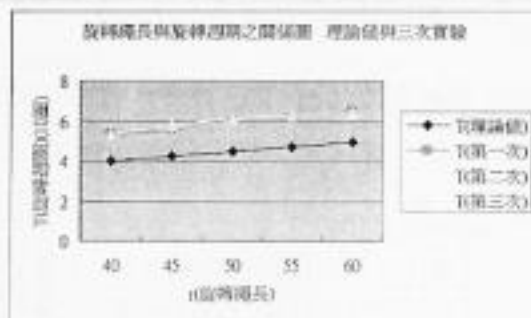
第三次實驗

r (m)	M (kg)	M' (kg)	π	K	T (s/圈)
40	0.05	0.01	3.141	2.4833	4.74
45	0.05	0.01	3.141	2.4833	5.43
50	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.04
55	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.06
60	0.05	0.01	3.141	2.4833	6.67

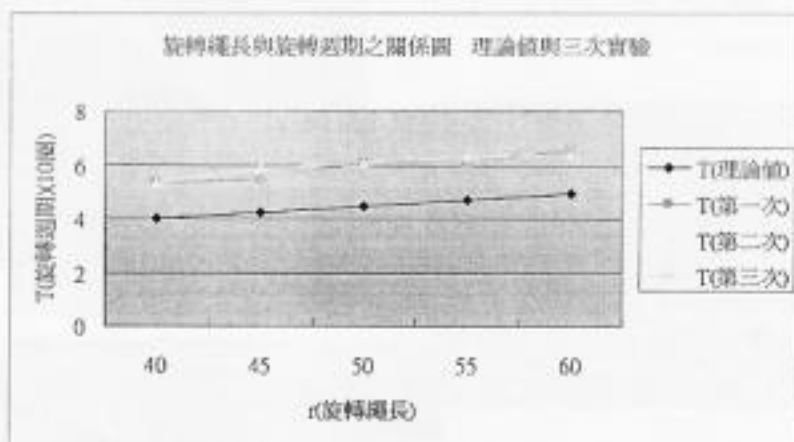


比較

	理論值	第一次	第二次	第三次
T	4.0134	5.35	5.36	4.74
	4.2569	5.46	5.84	5.43
	4.4871	6.07	6.10	6.04
	4.7062	6.11	6.30	6.06
	4.9154	6.57	6.39	6.67

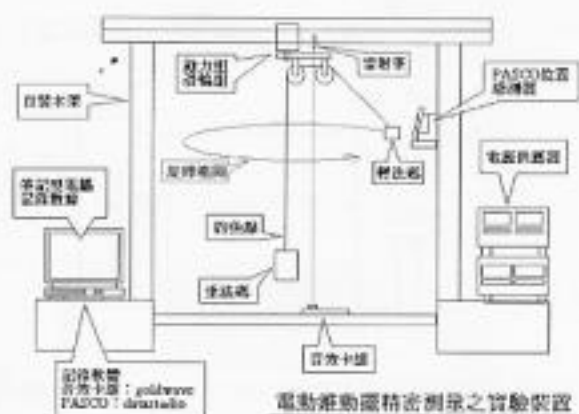


(1)公式推導出的 r(旋轉半徑)與 T(旋轉週期)理論值與實驗值誤差達一秒上下。



觀察三次實驗，發現其實驗值直線三次都大致重合。但都跟理論值誤差大約一秒之上，推測誤差的產生可能源自於 (1)馬達產生不穩定 (2)R(旋轉半徑)值有誤差 (3)時間T之測量有人為的誤差

實驗四 利用 PASCO、音效卡測量電動雜動擺—雙滑輪



電動雜動擺精密測量之實驗裝置

以上實驗一到實驗三的實驗法，皆是測量者以目視並測量之。人為誤差原因占大多因素。

為了減小誤差，我們決定修改實驗裝置。

PASCO 超音波移動感應器

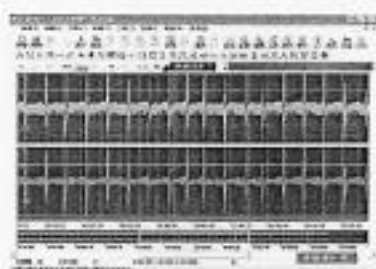
PASCO 超音波移動感應器為一種每秒發射 100 赫茲頻率音波的感應器。記錄反射聲波以求得距離。當在最初，雜動擺之繩錘尚未擺至感應器與中心軸之間時，感應器所測量的距離為感應器至中心軸之距離(D)。當繩錘擺至感應器與中心軸之間，感應器所測量的為感應器至繩錘之距離(d)。

利用 Data Studio 軟體，紀錄位置變化。以 $D \cdot d$ 的結果，求得旋轉半徑(R)。

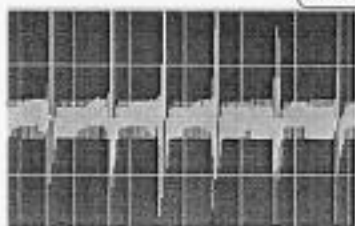


上為 PASCO 位置感應器
左為實驗裝置全圖

音效卡測量組



Gold Wave



音效卡測量組 實驗裝置示意圖

將錘動擺裝置於雷射筆與光敏電阻之間，當錘動擺遮斷雷射，電路將產生瞬間的電壓變化。利用音效卡可測到瞬間電壓變化的特性，紀錄錘動擺旋轉之週期，並以 gold wave 軟體，紀錄週期的變化。

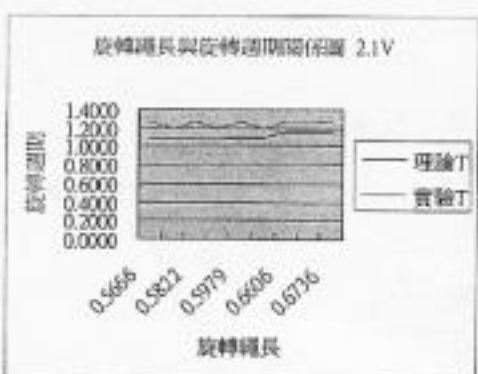
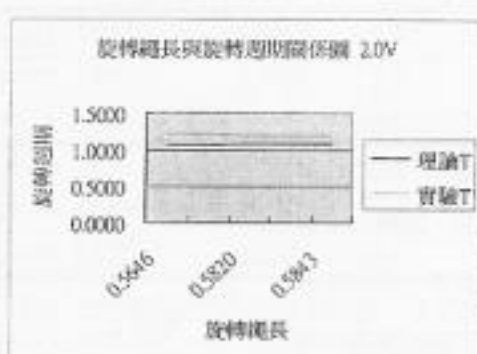
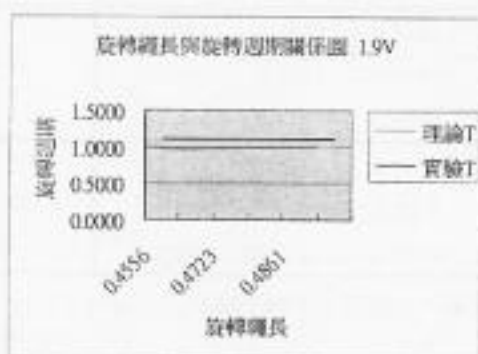
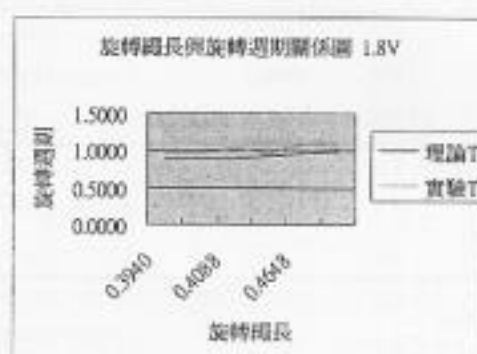
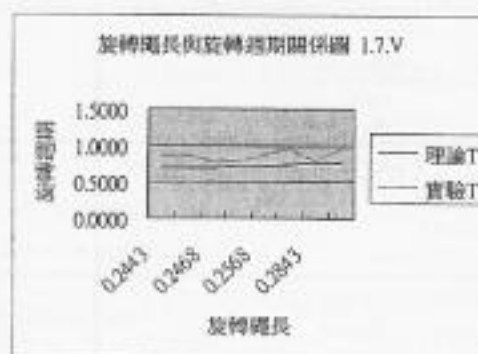
實驗結果

M 重錘錘質量皆為 0.1(kg)			M 輕錘錘質量皆為 0.05(kg)			$r=3.14$	
電流	半徑(m)	R-r(m)	$\cos \theta$	T(s)	$Mg \cos \theta$	$4\pi^2 mR/T^2$	誤差值
1.8A	0.4525	0.3242	0.874	1.0205	0.8565	0.8568	-0.0332
	0.4439	0.2999	0.8573	1.0205	0.8401	0.8405	-0.0436
	0.4409	0.2924	0.8515	1.0205	0.8340	0.8348	-0.0443
1.9A	0.5346	0.4046	0.8881	1.1005	0.8703	0.8704	-0.0115
	0.5271	0.4351	0.8756	1.1005	0.8580	0.8582	-0.0162
	0.5216	0.4684	0.8664	1.1005	0.8490	0.8492	-0.0235
2.0A	0.4529	0.5416	0.8748	1.0205	0.8573	0.8575	-0.0301
	0.4471	0.5479	0.8635	1.0205	0.8462	0.8465	-0.0413
	0.4449	0.5379	0.8594	1.0205	0.8422	0.8424	-0.0240
2.1A	0.5269	0.5719	0.8596	1.1105	0.8424	0.8425	-0.0133
	0.5248	0.5635	0.8562	1.1105	0.8390	0.8391	-0.0102
	0.5230	0.5723	0.8532	1.1105	0.8361	0.8362	-0.0177
2.2A	0.7521	0.5939	0.8423	1.3405	0.8254	0.8253	0.0141
	0.7757	0.5957	0.8431	1.3605	0.8262	0.8263	-0.0186
	0.7638	0.5951	0.8428	1.3505	0.8259	0.8258	0.0163

實驗五 利用 PASCO、音效卡測量電動雜動擺—單滑輪

實驗目的與裝置同實驗三，也是為了找出週期與旋轉繩長的關係。但本次實驗之測量是以 PASCO 與音效卡組測量法

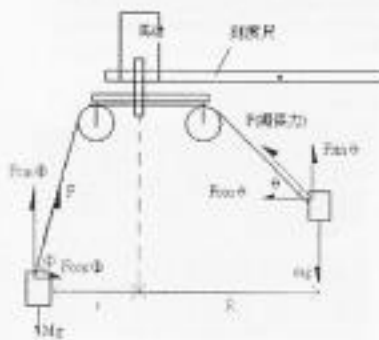
實驗結果



- (1) 跟實驗二與實驗三比起來，誤差很明顯的降低了，理論與實驗週期之差從原本的 1 降為約 0.4 以內，利用 PASCO 和音效卡測量，的確減少人工測量的誤差。
- (2) 當提供的電流增加時，旋轉半徑增加，理論 T 變大。
- (3) 當提供的電流增加時，實驗 T 變大，故，實驗值與理論值相符。
- (4) r 與 T^2 成正比， r 與 T 之數據圖表形成一拋物線。

實驗六 模擬雙星運動

我們在實驗的最後，希望能以我們的錘擺實驗裝置，模擬雙星運動。我們再實驗的最初以下圖的實驗裝置進行實驗，但發現雙星運動在實際上並不成立，我們推導公式發現以下結果：



$$F \cos \phi = \frac{4\pi^2 r M}{T^2} \rightarrow r = \frac{T^2 F \cos \phi}{4\pi^2 M}$$

$$F \cos \phi = \frac{4\pi^2 R m}{T^2} \rightarrow R = \frac{T^2 F \cos \phi}{4\pi^2 m}$$

$$\rightarrow \frac{r}{R} = \frac{m T^2 \cos \phi}{M T^2 \cos \phi}$$

$$\begin{cases} F \sin \phi = mg, F = mg \csc \phi \\ F \sin \phi = Mg, F = Mg \csc \phi \end{cases} \rightarrow \frac{mg \csc \phi}{Mg \csc \phi} = 1$$

$$\rightarrow \frac{m}{M} = \frac{\csc \phi}{\csc \phi} = \frac{\sin \phi}{\sin \phi}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{m T^2 \cos \phi}{M T^2 \cos \phi} \frac{\sin \phi \csc \phi}{\sin \phi \csc \phi} = \tan \phi \cot \phi \frac{T^2}{T^2}$$

$$F(\phi) = \frac{r}{R} = \tan \phi \cot \phi \frac{T^2}{T^2}$$

對角度微分

$$F(\phi) = \sec^2 \phi \cot \phi \frac{T^2}{T^2}$$

$$F(\phi) = \tan \phi (-\csc^2 \phi) \frac{T^2}{T^2}$$

只要角度的稍微改變，旋轉半徑將改變許多。我們推斷，由於我的馬達因為無法提供準確的轉速，而使我的角度變化改變非常劇烈，因此我們進行等質量擺鐘的雙星運動實驗裝置。推導公式如右：

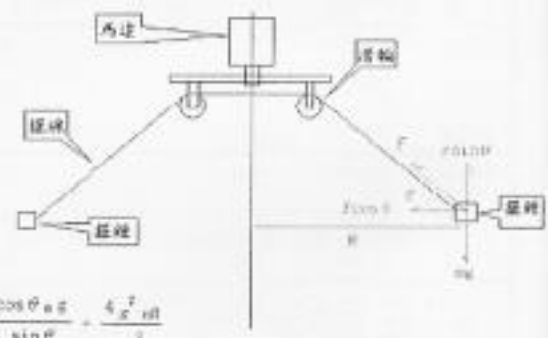
- r 旋轉半徑
- R 旋轉半徑
- m 旋轉半徑
- M 旋轉半徑
- T 旋轉半徑

$$\begin{cases} F \sin \phi = mg \\ F \cos \phi = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} \end{cases}$$

$$r = \frac{mg}{\sin \phi} \rightarrow \frac{\cos \phi \cdot r}{\sin \phi} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\phi = \frac{4\pi^2 R \tan \phi}{T^2}$$



雙星運動錘擺等質量錘擺實驗裝置與公式圖

再進行實驗時發現，此實驗可行，所以我們便開始測量其旋轉半徑及旋轉週期。

實驗結果

m 兩擺錘皆為 0.05(kg)				$\pi = 3.14$				
電流	高度(m)	半徑(m)	R-r(m)	$\tan \theta$	T(s)	$4\pi^2 R \tan \theta / T^2$	g	誤差值
2.6A	0.3654	0.5944	0.4894	0.7466	1.337	9.8012	9.8	-0.0129
	0.3652	0.6102	0.5021	0.7273	1.337	9.8019	9.8	-0.0197
	0.3648	0.6143	0.5049	0.7225	1.337	9.8023	9.8	-0.0236
2.7A	0.3412	0.5752	0.4995	0.6830	1.258	9.8015	9.8	-0.0153
	0.3409	0.5848	0.5074	0.6718	1.258	9.8013	9.8	-0.0134
	0.3411	0.5867	0.5093	0.6697	1.258	9.8022	9.8	-0.0226
2.8A	0.3324	0.5279	0.5086	0.6535	1.179	9.7987	9.8	0.0128
	0.3326	0.5291	0.5101	0.6520	1.179	9.7980	9.8	0.0200
	0.3331	0.5272	0.509	0.6544	1.179	9.7986	9.8	0.0137
2.9A	0.3241	0.4928	0.5395	0.6007	1.092	9.8010	9.8	-0.0112
	0.3244	0.4811	0.5273	0.6152	1.092	9.7988	9.8	0.0117
	0.3239	0.4798	0.5249	0.6170	1.092	9.8019	9.8	-0.0195
3.0A	0.2663	0.6117	0.5701	0.4671	1.073	9.7976	9.8	0.0242
	0.2659	0.6100	0.5674	0.4686	1.073	9.8021	9.8	-0.0219
	0.2661	0.6122	0.5699	0.4669	1.073	9.8017	9.8	-0.0174

由以上實驗我們發現，每次不同電流內所進行的三次實驗裡，三次誤差皆相似，故可以判斷為準確之測量。

◎ 結論

- (一)利用 PASCO 和音效卡測量出來的數據，明顯的比人工測量來的準確，大大降低了誤差。
- (二)提供的電流越大， θ 越大(變化不多)， $\cos \theta$ 變小(理論質變小)，旋轉半徑 r 也變小(實驗質變小)。
- (三)提供的電流越大，轉出的旋轉半徑越大。旋轉週期也變大，變化稍微比旋轉半徑來的大，但平方後，變化量與旋轉半徑差不多，故，實驗值並沒有多大的變化。理論值不會受旋轉半徑或旋轉周期的影響。
- (四)理論值與實驗值只會受 θ 影響，不會受旋轉半徑或旋轉周期的影響。
- (五)原本影響誤差的因素，都可透過下列方法將其減到最小
 1. 電源供應器供應不穩定之電壓：由實驗可知，電流不一樣，只會影響理論值與實驗值的大小(會一起變大或變小)，並不會影響兩者之間的誤差。
 2. R (旋轉半徑)值之測量法有誤差：利用 PASCO 測量，減少人工測量的誤差。
 3. 時間 t (旋轉週期)之測量法有誤差：利用音效卡測量旋轉週期，減少人工測量的誤差。
- (六)數據中仍有其他影響誤差的因素存在，像馬達不穩定，或是其他我們沒討論到的原因，都使得實驗值和理論值有微小的誤差在，這將是我們未來將要努力的目標之一。

◎ 參考資料

- (一)高中 物質科學物理篇 上冊第四章第六節 南一書局出版
- (二)北市景美女中 第四十屆全國科展高中組物理科第一名「以磁力模擬萬有引力的平面實驗」
- (三)陳昱江學長「利用音效卡精密測量時間之研究——一種既經濟又簡便的時間精密測量方法」
- (四)GoldWave 網站

◎附錄:實驗圖片

		
<p>使用電腦中的同學</p>	<p>調整實驗裝置中的同學</p>	<p>PASCO 超音波位置感測器</p>
		
<p>滑輪組特寫 (壓克力板與滑輪)</p>	<p>紀錄數據的筆記型電腦，左方為 PASCO 工具箱以及法碼盒</p>	<p>由下方仰視的實驗裝置 (中央可看見雷射筆光點，滑輪組的法碼，中央指標，上方為極座標板)</p>
		
<p>正在進行錐動擺運動的實驗裝置</p>	<p>馬達與雷射筆</p>	<p>電源供應器</p>