

# 2022 年【全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

## 高中（職）組 成果報告表單

題目名稱：物體的二維拋體運動的

### 一、摘要：

本實驗在探討物體自由落下至斜面後，此落點間距與角度的關係。進行理論推導後發現除了角度的正弦含數值與落點間距的關係中，其恢復係數和落點間距的關聯性用  $(e + e^2)$  比  $e^2$  的  $e$  更高。參考實驗的結果，在恢復係數為 0.87 的條件下，其理論計算出的第二落點間距與第一落點間距的比值為 1.67，而單純以  $e^2$  所計算出的比值為 0.76，與實際結果不合。故可知道恢復係數  $e$  要發揮出其作用僅由其中一個方向提供。

### 二、探究題目與動機

在高二物理課中初步接觸到拋射運動，除了斜坡上的拋體運動，也包括撞擊階梯的問題，題型中可看到不同斜坡夾角進行拋射運動後，落點距離的解析計算，並推導出其射程。為想了解真實與理論間的關係，也希望更加了解拋體分析的運動學問題，因此我們實際閱讀了老師補充的文章，發現現實中並沒有太多該項類型的討論，所以設計了類似的實際實驗進行討論，也希望對此進行定量性的實驗探討。藉由調整不同的拋射角度、高度，可幫助我們更加了解拋射體在斜面上的射程以及運動狀態如何影響其結果。

### 三、探究目的與假設

#### (一) 實驗理論推導

##### 1. 恢復係數的定義

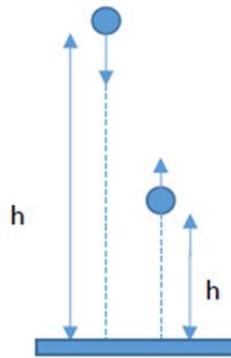


圖 1 恢復係數測定原理圖

於高中課本中的恢復係數定義利用  $e = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}$ 。

## 2. 延伸討論經多次碰撞後的斜面射程

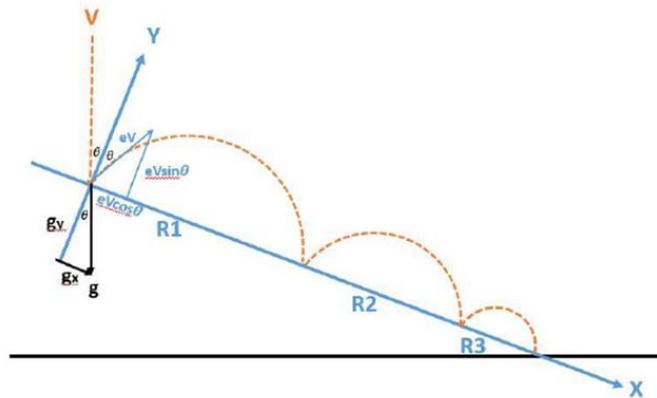


圖 2 於斜面上連續碰撞的射程圖

與1.分析利用運動獨立性的觀念以及旋轉座標係，進行運動學進行分析，可分別求出沿著斜面的第一段射程R1的飛行時間為列式(1)

$$-ev\cos\theta = ev\cos\theta - g\cos\theta t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2ev\cos\theta}{g\cos\theta} = \frac{2ev}{g} \dots\dots\dots(1)$$

而其斜面水平射程經多數學推導如式(2)

$$R_1 = (ev\sin\theta) \times \left(\frac{2ev}{g}\right) + \frac{1}{2}(g\sin\theta) \times \left(\frac{2ev}{g}\right)^2 = \frac{4(ev)^2\sin\theta}{g} \dots\dots\dots(2)$$

由上述可以分別得出距離R1稱為第一落點間距、R2稱為第二落點間距、R3稱為第三落點間距以及飛行時間t1為第一落點間距飛行時間、t2為第二落點間距飛行時間、t3為第

三落點間距飛行時間的結果。

$$\text{結果為： } R_1 = \frac{4(ev)^2 \sin\theta}{g}、R_2 = \frac{4e^4 v^2 \sin\theta}{g}、R_3 = \frac{4e^6 v^2 \sin\theta}{g}$$

$$t_1 = \frac{2ev}{g}、t_2 = \frac{2e^2 v}{g}、t_3 = \frac{2e^3 v}{g}。$$

本實驗研究主要利用上述的推導結果與實驗進行數據擬合，並針對射程與斜坡夾角進行射程的討論。

(二) 根據上述理論推導，以下為我們的實驗目的:

1. 探討不同傾斜角度的斜面如何影響運動體於斜面射程的關係。
2. 探討不同傾斜角度的斜面其落地點間的關係。

#### 四、 探究方法與驗證步驟

(一) 探究方法

1. 研究方法流程圖:

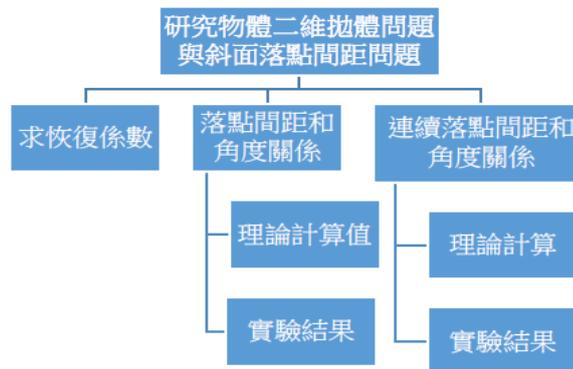


圖 3 實驗架構圖

2. 分析軟體：Tracker、blender、Excel

3. 實驗步驟

(1)將高度調好，將自製裝置角度設定好

(2)在固定高度下釋放乒乓球

(3)用手機錄影紀錄整個過程的完整彈跳



圖 4 自製斜面裝置和乒乓球

(4)使用 Tracker 軟體追蹤乒乓球的行徑，轉成數據

(5)將數據使用 Excel 分析及整理，製成圖表

## (二) 研究分析與結果

### 1. 選用乒乓球與木板間的恢復係數測定

利用 Tracker 軟體進行高度的定點，利用上述的恢復係數公式求係數，可由其高度關係對應出恢復係數為 0.87

### 2. 碰撞體於斜面碰撞後在斜面上的射程與角度關係

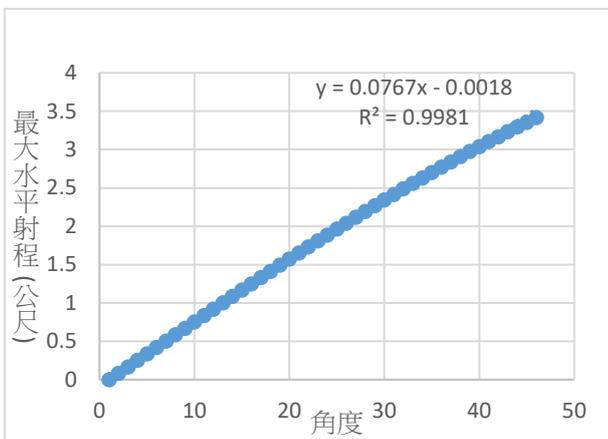


圖 5 (a)角度與斜坡上第一與第二落點間距理論值分析(恢復係數  $e=0.8$  貢獻)

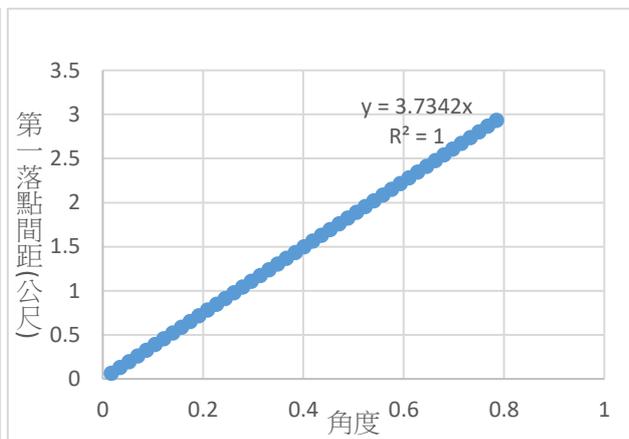


圖 5 (b)角度與斜坡上第一與第二落點間距理論值分析(討論某一方向的恢復係數  $e=0.84$  貢獻)

分別比較圖 5(a)以及圖 5(b)的相關係數，引發我們對恢復係數的討論，其理論分析後

的結果為  $R_1 = \frac{4(ev)^2 \sin\theta}{g}$  和  $R'_1 = \frac{2v^2 \sin\theta}{g} (e + e^2)$ 。不考慮空氣阻力為零的情況下，以

$v = \sqrt{2gh}$ 所推出撞擊第一個斜面落點位置的速度為 3.44m/s。以此速度進行第一落點

間距的理論計算，如圖 2 運動分析圖發現他的相關係數並未達到相關係數為 1 的完全

正相關，代表此一公式的擬合並非最佳解，使我們思考是否恢復係數對整體公式的表

現有跡可循。後來我們針對其相關係數整理成  $R'_1 = \frac{2v^2 \sin\theta}{g} (e + e^2)$ ，在高中物理中，恢

復係數的定義因為單一方向的操作，其相關係數為 1 比  $R_1$  的相關係數 0.9981，更加

接近完善的擬合，故改用 $R'_1$ 的公式進行推導，所畫出的理論圖 2 可以達到完全相關的結果。

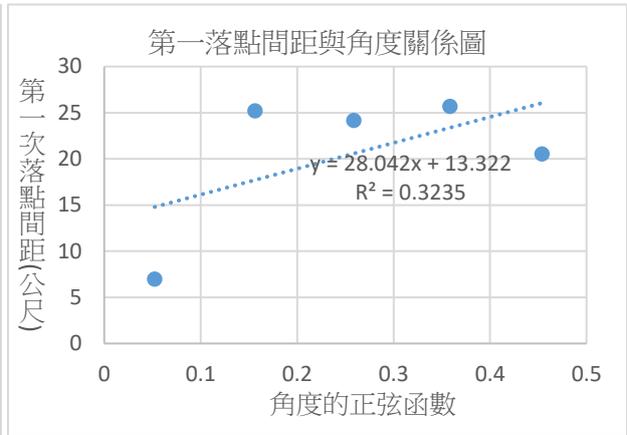
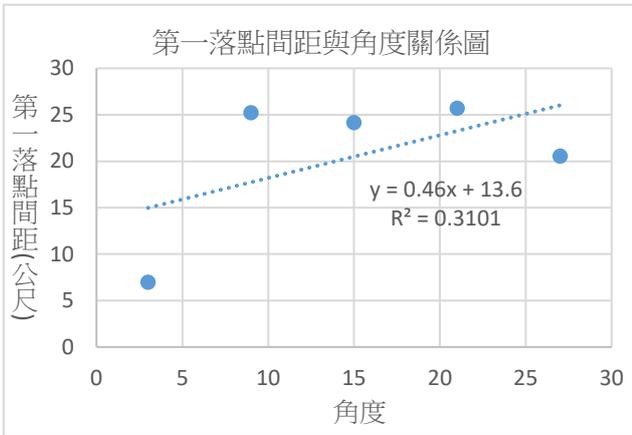


圖 6 (a)第一落點間距與角度的數據分散佈圖

圖 6 (b)第一落點間距與角度正弦函數的數據分散佈圖

圖 6 (a) (b)為真實進行實驗的結果紀錄，其結果可發現相關係數並不高，與理論分析出來的結果無法進行線性擬合，或許未來是值得深究的變因，因可能有其他因素造成。也能在針對角度的部分增加測量數目。提高其相關係數的大小。

### 3. 各落地點間距離與角度的關係討論

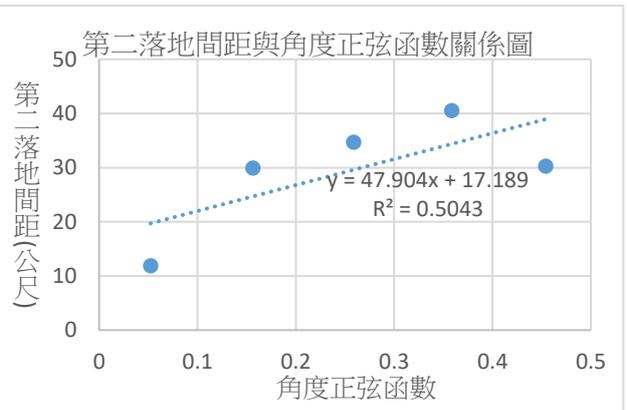
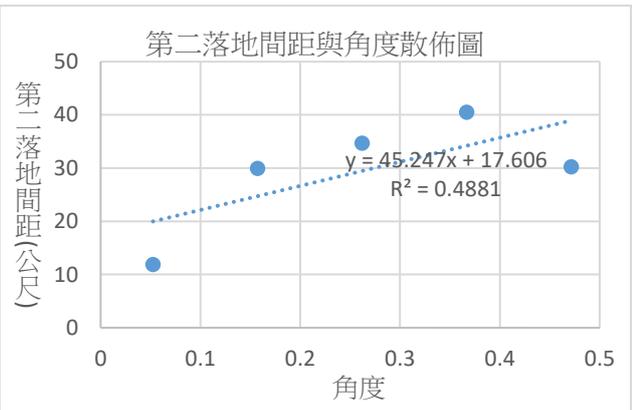


圖 7 (a)實驗數據分析第二落點間距 R2 與角度散佈圖

圖 7 (b)實驗數據分析第二落點間距 R2 與角度正弦函數散佈圖

圖 7(a) (b)為第二落點間距和角度的散佈圖，針對角度與落點間距的關係進行作圖，為了讓相關性提高，改用正弦函數與 R2 的關係圖，可發現其相關係數由 0.49 提高到 0.50。故其角度的正弦與 R2 的關係比正弦函數與 R2 的散佈關係的相關性有所提升。

### (三) 傾斜角度與落點間的射程間的關係

針對落地點間射程關係與第二落點間距  $R_2$  的結果雖然無法明確角度與落點間距的關係，但卻也讓我們從理論推導計算中發現，當把推論出來的間距公式進行調整後所得到的間距與恢復係數有所關聯性，若彈性係數為高於特定數值時如恢復係數為  $e = 0.5$ ，經過計算後的射程可能會逐步減少。然而有數據中發現，落點間距的射程與恢復係數的有關連性。由於此次實驗所使用的乒乓球與木板間的恢復係數為  $0.87$ ，且其間距也真的隨著彈跳的次數增加而造成其落點間距會變大。

## 五、結論與生活應用

- (一) 此實驗的彈性係數的數值應為  $0.87$ 。
- (二) 斜坡角度與其落點間距關係圖的相關係數經隨著彈跳次數增加而有提升。
- (三) 落點間距的大小增加，而其增加比例經由計算為  $1.47$ 。
- (四) 由恢復係數於鉛直與水平皆會貢獻來看其理論值推算落點間距的距離應為  $1: e^2: e^4 \dots$  的等比關係，然而經過實際的實驗值所推估的數值為  $1.47$ ，代表其比例關係應為  $(e+e^2)$  的倍數，以  $0.87$  作為恢復係數代入後約為  $1.62$ ，較符合比例為  $e^2$  倍數結果。

## 參考資料

- (N.d.). Tracker 6.0.0 免安裝中文版- 物理實驗影像分析軟體 - 阿榮福利味。
- (N.d.). Tracker 軟體 安裝與使用教學。
- Wang, klwang. (2021, June 19). Blender 2.9 特效教學:自由落體物體碰撞碎裂特效的製作 \_Rigid Body 剛體物理現象的應用。
- Wandel, M. (2019, February 8). Lego Machine Catapult (Rapid Fire)。
- 林秀豪. (n.d.). 普通型高級中學 選修物理一(全一冊)力學一教師手冊第三章.龍騰文化事業股份有限公司。
- 鄭呈因, & 張銘傑 (Eds.). (n.d.). SUPER 選修物理一(全)力學一教師講義教師用本第三章. 龍騰文化事業股份有限公司。
- 拋體分析. (n.d.)。
- 徐國誠. (n.d.). 拋體與階梯。