2022 年【全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組 成果報告表單

題目名稱：如何摺出三邊長為整數的直角三角形

一、摘要

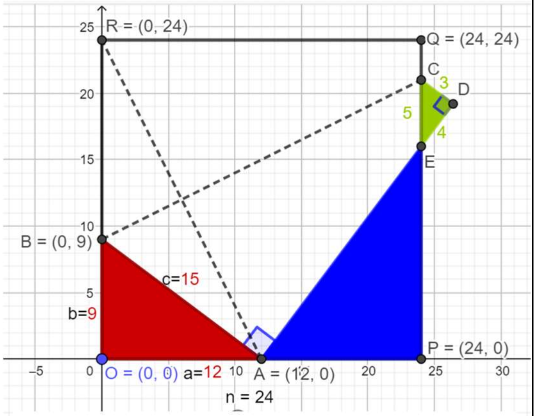
如果我們知道一個直角三角形的 3 個邊都是整數值，可以利用摺紙的方法摺出這種比例的三角形。從直角三角形三邊的畢氏三元數，建構出適當邊長的正方形與適當比例的等分點來摺出所要的直角三角形，將鏡射的兩個全等三角形視為不同，可以利用這個方法模擬摺出所需比例的直角三角形。

二、探究題目與動機

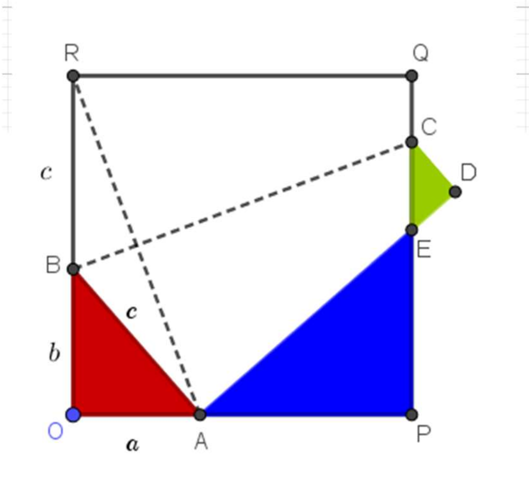
芳賀第一定理中所摺出來的三角形是一個 4：3：5 的三角形。而數學課本中介紹了許多邊長比為整數的直角三角形，是不是也都能透過摺紙的方式摺出來？所以我們想要了解是否可以摺出不同整數比例的直角三角形。

三、探究目的與假設

芳賀定理告訴我們：取一張正方形紙 $OPQR$，將左上角的頂點 R 摺至下方 OP 邊上任一點，可以得到(如右圖)紅、藍、綠三個相似的三角形，若 R 點恰為 OP 邊的中點，我們可以得到這個三角形的三邊長的比例為 4 : 3 : 5。事實上如果這張正方形紙邊長為 24 公分，我們恰可得到最小的三角形(綠)三邊長為 3 公分、4 公分、5 公分，且紅藍綠三個三角形都是 3 : 4 : 5 的三角形。



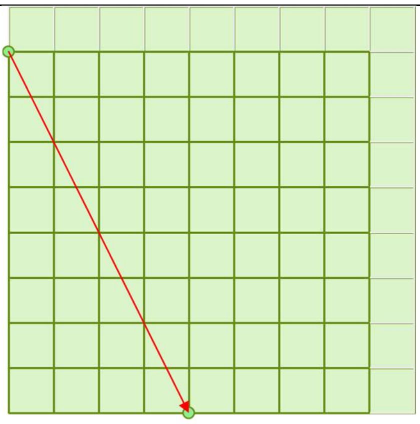
假設直角三角形的三邊長為 a、b、c，且 c 為斜邊，我們可以利用邊長為 $b+c$ 的正方形紙將他的左上角摺到底邊邊 $a：(b+c)$處，便可以得到三邊長為 a、b、c 的直角三角形。

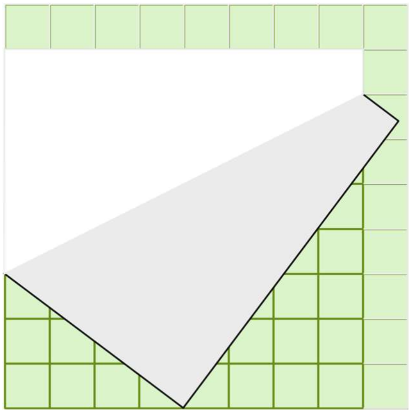


四、探究方法與驗證步驟

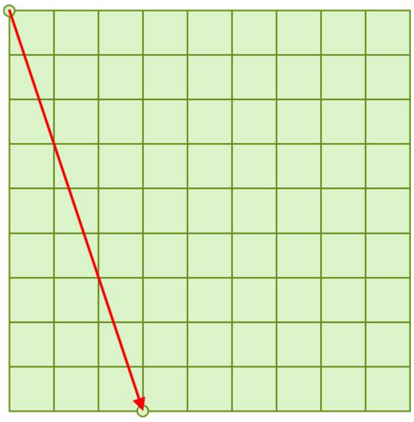
(一)摺出邊長為 3、4、5 的直角三角形

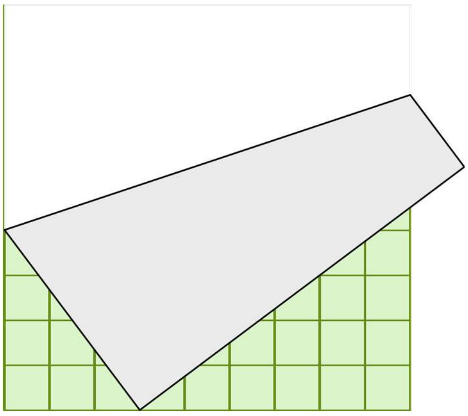
摺出邊長為 3、4、5 的直角三角形有兩個方法。一種是用 8×8 的正方形紙，將左上角摺到底邊的$\frac{4}{3+5}=\frac{1}{2}$處；另一種是用 9×9 的正方形紙，將左上角摺到底邊的$\frac{3}{4+5}=\frac{1}{3}$處。





$$\frac{4}{3+5}=\frac{1}{2}$$

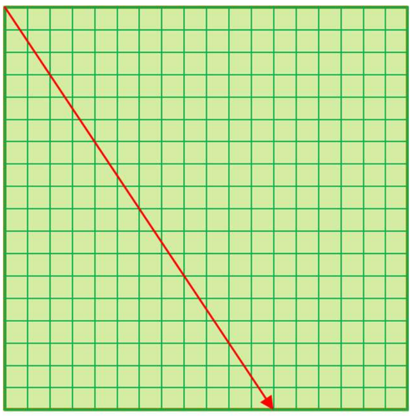


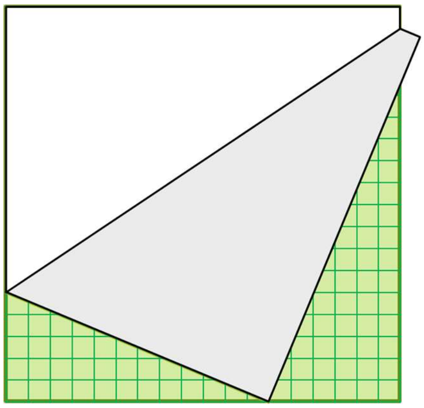


$$\frac{3}{4+5}=\frac{1}{3}$$

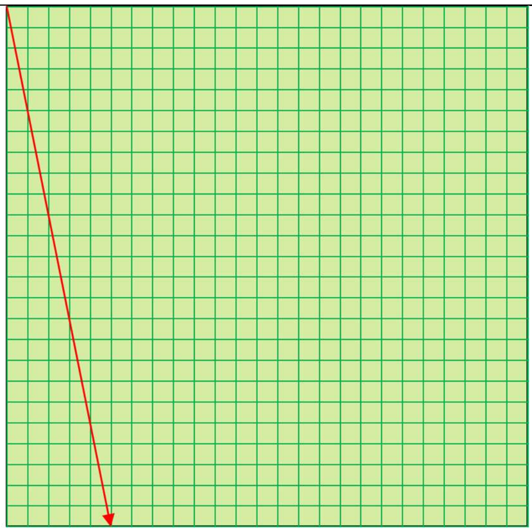
(二)摺出邊長為 5、12、13 的直角三角形

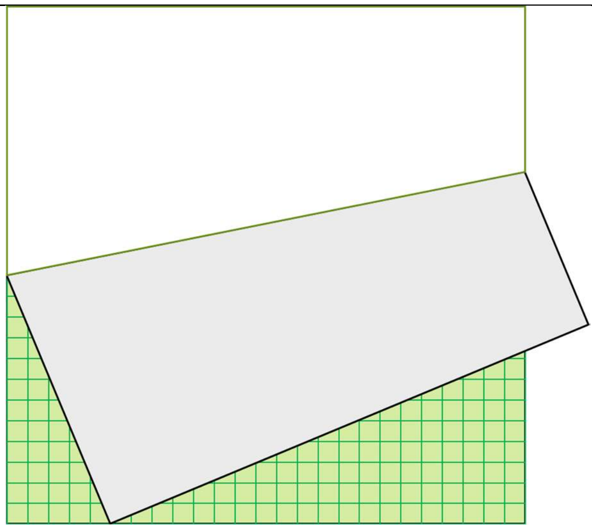
摺出邊長為 5、12、13 的直角三角形有兩個方法。一種是用 18×18 的正方形紙，將左上角摺到底邊的$\frac{12}{5+13}=\frac{2}{3}$處；另一種是用 25×25 的正方形紙，將左上角摺到底邊的$\frac{5}{12+13}=\frac{1}{5}$處。





$$\frac{12}{5+13}=\frac{2}{3}$$





$$\frac{5}{12+13}=\frac{1}{5}$$

(三)列表討論

1. $\frac{1}{n}$型：左上角 R 點對底邊邊長由左至右的第 1 個等分點對摺。

利用 Excel 列表如下：

a	4	3	8	5	12	7	16	9	20	11	24	13	28	15
b	3	4	15	12	35	24	63	40	99	60	143	84	195	112
c	5	5	17	13	37	25	65	41	101	61	145	85	197	113
正方形邊長 $b+c$	8	9	32	25	72	49	128	81	200	121	288	169	392	225
底邊比例	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{15}$

底邊比例$\frac{1}{n}$，如果 n 為偶數，還原 a 值為 $2n$，如果 n 為奇數，還原 a 值為 n。

2. $\frac{2}{n}$型：左上角 R 點對底邊邊長由左至右的第 2 個等分點 A 對摺，$n>2$。

a	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116
b	5	21	45	77	117	165	221	285	357	437	525	621	725	837
c	13	29	53	85	125	173	229	293	365	445	533	629	733	845
正方形邊長 $b+c$	18	50	98	162	242	338	450	578	722	882	1058	1250	1458	1682
底邊比例	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{29}$

底邊比例$\frac{2}{n}$，且 n 為奇數，還原 a 值為 $2(2n)$。

3. $\frac{3}{n}$型：左上角 R 點對底邊邊長由左至右的第 3 個等分點 A 對摺。

a	24	15	21	48	60	33	39	84	96	51	57	120	132	69
b	7	8	20	55	91	56	80	187	247	140	176	391	475	260
c	25	17	29	73	109	65	89	205	265	149	185	409	493	269
正方形邊長 $b+c$	32	25	49	128	200	121	169	392	512	289	361	800	968	529
底邊比例	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{23}$

底邊比例$\frac{3}{n}$，如果 n 為偶數，還原 a 值為 $2(3n)$，如果 n 為奇數，還原 a 值為 $3n$。

4. $\frac{4}{n}$型：左上角 R 點對底邊邊長由左至右的第 4 個等分點 A 對摺，$n > 4$，且 n 與 4 互質。

a	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248
b	9	33	65	105	153	209	273	345	425	513	609	713	825	945
c	41	65	97	137	185	241	305	377	457	545	641	745	857	977
正方形邊長 $b+c$	50	98	162	242	338	450	578	722	882	1058	1250	1458	1682	1922
底邊比例	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{4}{31}$

底邊比例$\frac{4}{n}$，且 n 為奇數，還原 a 值為 $2(4n)$。

5. $\frac{5}{n}$型：左上角 R 點對底邊邊長由左至右的第 5 個等分點 A 對摺，$n > 5$，且 n 與 5 互質。

a	60	35	80	45	55	120	65	140	160	85	180	95	105	220
b	11	12	39	28	48	119	72	171	231	132	299	168	208	459
c	61	37	89	53	73	169	97	221	281	157	349	193	233	509
正方形邊長 $b+c$	72	49	128	81	121	288	169	392	512	289	648	361	441	968
底邊比例	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{22}$

底邊比例$\frac{5}{n}$，如果 n 為偶數，還原 a 值為 $2(5n)$，如果 n 為奇數，還原 a 值為 $5n$。

6. $\frac{6}{n}$型：左上角 R 點對底邊邊長由左至右的第 6 個等分點 A 對摺。

a	84	132	156	204	228	276	300	348	372	420	444	492	516
b	13	85	133	253	325	493	589	805	925	1189	1333	1645	1813
c	85	157	205	325	397	565	661	877	997	1261	1405	1717	1885
正方形邊長 $b+c$	98	242	338	578	722	1058	1250	1682	1922	2450	2738	3362	3698
底邊比例	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{17}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{29}$	$\frac{6}{31}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{6}{41}$	$\frac{6}{21}$

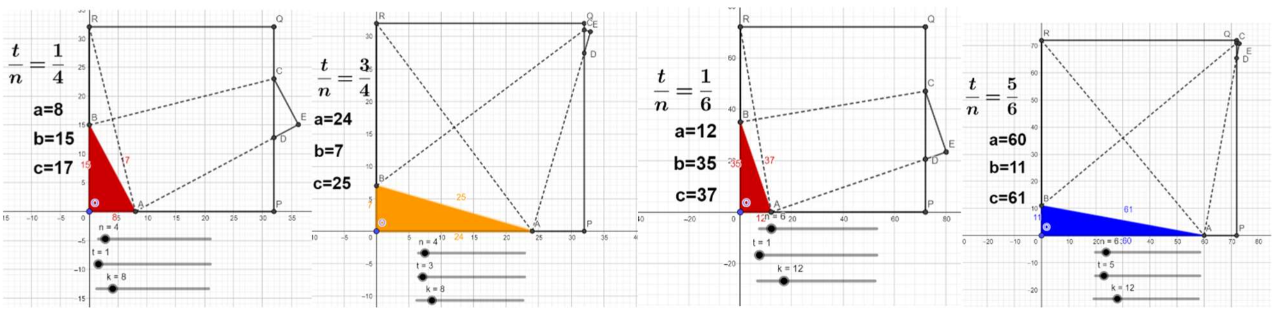
底邊比例$\frac{6}{n}$，且 n 為奇數，還原 a 值為 $6(2n)$。

綜合以上討論得：如果底邊比例$\frac{t}{n}$，當 nt 為偶數時，還原 a 值為 $2nt$；當 nt 為奇數時，還原 a 值為 nt。

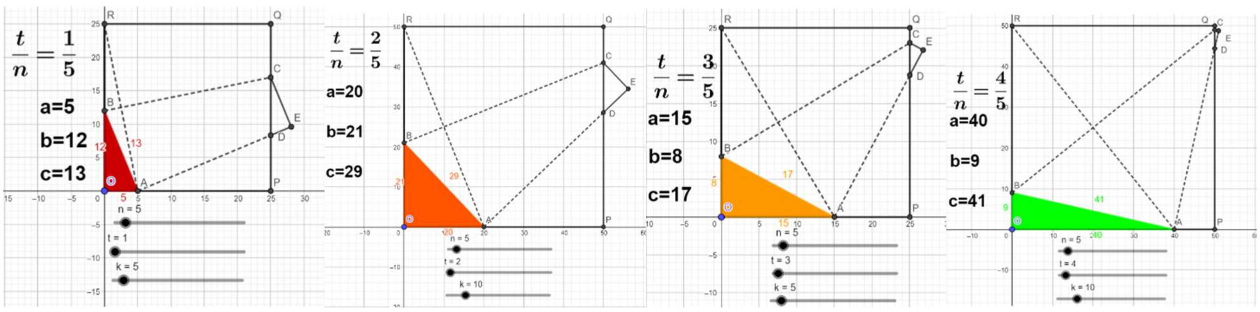
(二)不同的討論方式

若以等分點來考慮，我們只要按照 1/2，1/3，2/3，1/4，3/4，1/5，2/5，3/5，4/5，1/6，5/6，1/7，2/7，3/7，4/7，5/7，6/7，…，一定可以把所有的情形寫完。若分母為 n，只要討論不大於 n 且與 n 互質的個數，也就是可以用尤拉函數算出個數來確認是否有漏列的情形，此時我們所需最小邊長正方形紙不是n^2就是$2n^2$。當 n 為偶數時，所需最小邊長 L 為$2n^2$；當 n 為奇數時，若為奇數分點所需邊長為n^2，若為偶數分點所需邊長為$2n^2$。

n	2	3		4		5				6		7					
t	1	1	2	1	3	1	2	3	4	1	5	1	2	3	4	5	5
a	**4**	**3**	**12**	**8**	**24**	**5**	**20**	**15**	**40**	**12**	**60**	**7**	**28**	**21**	**56**	**35**	**84**
b	**3**	**4**	**5**	**15**	**7**	**12**	**21**	**8**	**9**	**35**	**11**	**24**	**45**	**20**	**33**	**12**	**13**
c	**5**	**5**	**13**	**17**	**25**	**13**	**29**	**17**	**41**	**37**	**61**	**25**	**53**	**29**	**65**	**37**	**85**
邊長	8	9	18	32	32	25	50	25	50	72	72	49	98	49	98	49	98



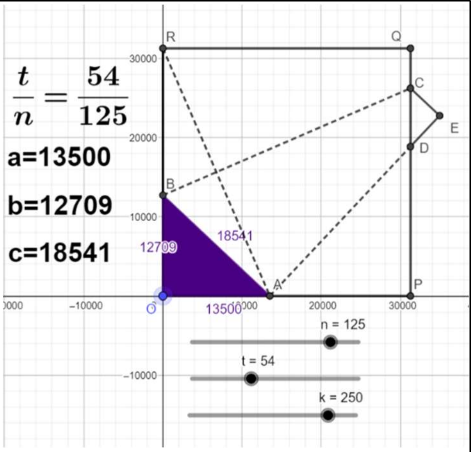
$L = 15 + 7 = 2(4)^2$ $L = 7 + 25 = 2(4)^2$ $L = 35 + 37 = 2(6)^2$ $L = 11 + 61 = 2(6)^2$



$L = 12 + 13 = (5)^2$ $L = 21 + 29 = 2(5)^2$ $L = 8 + 17 = (5)^2$ $L = 9 + 41 = 2(5)^2$

看完重新排組的數據跟圖形，是不是和我們一樣有了新的發現；如果 c 是斜邊，我們發現如果有三邊長 a,b,c 的三角形，就也會有 b,a,c 的三角形，這樣算不算是同一個呢？在這邊我們將這兩組視為鏡射，且他們是由不同大小的正方形紙所摺出來的，由上圖(表)我們可以知道所選擇的最小正方形紙的邊長 L 為 $b+c$，而將$\frac{a}{b+c}$化為最簡分數之後，可以得到$\frac{t}{n}$，所以可以透過已知的畢氏三元素，決定紙的大小及相對應的等分點，摺出想要的畢氏三元數。

透過這個方法，我們解決了在 youtube 上徐惠莉老師在介紹畢氏定理的故事中，所提到的巴比倫泥板中出現的最大組勾股數為(18541,12709,13500)的問題。想要摺出這一組數，首先將 18541 加上 12709，可得到 31250，然後將$\frac{13500}{31250}$約分，便可以得到，也就是$\frac{54}{125}$。可以使用邊長為 31250 單位的正方形紙來摺，找到$\frac{54}{125}$這個分點後，對摺過去就可以求得，只是這一張紙就有點大了，還好電腦程式還能模擬顯示出來，這樣也就可以快速檢驗了這組數是否符合畢氏定理。



五、結論與生活應用

(一)正方形紙左上角點 R 對底邊邊長由左至右的$\frac{a}{b+c}$處 A 點對摺，$n > t$，且 n 與 t 互質，可得三邊長為正整數 a,b,c 的直角三角形，此時正方形邊長為 $b + c$。

(二)分母 n 的選取與分子 t 有關，必須 $n > t$ 且(n , t)=1，這樣可以使$\frac{t}{n}$為最簡分數，有利於列出所有未寫過的比例，可以利用尤拉函數確認所找的數量是否相符。

(三)正方形邊長取決於$\frac{t}{n}$，當 nt 為偶數時，還原 a 值為 $2nt$；當 nt 為奇數時，還原 a 值為 nt。

(四)利用 t (第 t 個等分點) 來討論及列式列表，可以讓我們以相同的分類公式代值求得，簡化計算得到簡單的計算公式。重新列表探討可以讓我們依序寫完所有的情形。

(五)本作品利用摺紙的方法透過紙張大小及分點比例的設計，實現摺出三邊皆為整數邊的直角三角形(畢氏三元數)，基於以上五點我們有信心可以列出所有畢式三元數，只是概念上的所有，畢竟無窮多個式列不完的。

(六)可以快速檢視所提供的三數是否為畢氏三元數。若 c 為斜邊，取$\frac{t}{n} = \frac{a}{b+c}$，利用 Geogebra 所寫的程式，可以模擬摺出的三角形的三邊長。

https://www.geogebra.org/m/h4jqym6r?fbclid=IwAR39r4nLf97kXz592DlFXNLPnimf4alFLjooxhmBJbKm9-abyQsTrEJPJkE

參考資料

1.阮華剛 譚志良 摺紙與數學

2.賴昱維 數學傳播 2014 年 6 月(150) 畢氏三元數生成公式之研究與發展

3.芳賀和夫 摺紙玩數學 2016 年 4 月 世茂出版

4.湯瑪斯．赫爾, 游森棚 數學摺紙計畫：30 個課程活動探索 2018/06/06 世茂出版

5.徐惠莉 CH4. 畢氏定理的故事—畢達哥拉斯的故事 Part2 / 7:18

https://www.youtube.com/watch?v=CnlyPZls9bA