

2022 年【全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中(職)組 成果報告表單

題目名稱：遊藝數學—Desmos軟體與數學的相遇

一、摘要：

現今生活中，告白的方式越來越多，而形式也不停地在變換。如果能使用數學方程式畫出與網路上不同的心形圖案，或許也是一種別出心裁的告白方式。

本研究先利用橢圓方程式與廣義角三角比，推導出心形方程式 $a(x-h)^2 - b|x-h|(y-k) + c(y-k)^2 = d$ 。再使用數學軟體 Desmos 繪圖，並分析方程式中的係數是否會影響圖形的變化。過程中發現係數 a 、 c 的改變會影響圖形的伸縮，而 h 、 k 則是影響圖形的平移。

最後我們除了使用推導出的方程式在 Desmos 上畫出生活中的雞心蛤，更搭配所學過的各種數學方程式，如：一次函數、二次函數、指數函數、圓及橢圓...等，畫出了台灣黑熊及高雄流行音樂中心。

二、探究題目與動機

前一段時間，很多人利用不同的方式去向喜歡的人表白，例如：化學式的 $Mg+ZnSO_4 \rightarrow MgSO_4+Zn$ 、外殼是愛心形狀的雞心蛤以及國文的藏頭詩.....等有趣的方式來表達自己的愛意。如果可以用化學式告白，那我們何不嘗試看看利用數學的方程式來表現呢？在網路上尋找的過程中，看到了一篇關於數學的告白方式，是利用方程式畫出心形的函數圖形，非常神奇。因此我們很好奇，想了解它的形成過程。

在搜尋過程中，也發現除了有名的心臟線之外，其實還有各式各樣的心形函數，每個函數畫出來的心形都不盡相同，因此我們挑了幾個比較能看懂的方程式去詢問老師，看看是否能用高中學到的知識推導出這樣的方程式，並利用數學軟體 Desmos 將心形圖案畫出來。

三、探究目的與假設

- (一) 了解這個心形函數是如何形成的。
- (二) 討論方程式的係數有沒有什麼限制，以及改變係數對圖形的影響。
- (三) 嘗試使用數學方程式在 Desmos 軟體上繪圖，看看是否能用數學呈現出生活中的畫面。

四、探究方法與驗證步驟

(一) 斜橢圓方程式推導

在平面上，使用高中學過的數學概念，將一平行於 x 軸的橢圓方程式逆時針旋轉 $\frac{\pi}{4}$ ，嘗試推導出斜橢圓方程，過程中如下：

- 1、已知座標平面上任意一點 $P(x, y)$ 均可表示為 $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ ，其中 r 為 P 點到原點 O 的距離， α 為 \overline{OP} 與 x 軸正向的夾角。若將 \overline{OP} 逆時針旋轉 β 角，並假設 P 點移動後的新座標 $P' = (x', y') = (r \cos(\alpha + \beta), r \sin(\alpha + \beta))$ 。

- 2、利用和角公式化簡

$$\begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta \\ y' = r \sin(\alpha + \beta) = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

又因為 $\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$ ，整理可得 $\begin{cases} x' = x \cos \beta - y \sin \beta \\ y' = x \sin \beta + y \cos \beta \end{cases}$

3、以長軸在 x 軸橢圓方程式 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ 為例，當 β 角為 $\frac{\pi}{4}$ 時，

$$\begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \text{---①} \\ y' = y \sin \frac{\pi}{4} + x \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \text{---②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \text{---①} \\ y' = y \sin \frac{\pi}{4} + x \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \text{---②} \end{cases}$$

① + ② 可得 $x' + y' = \sqrt{2}x$ ，即 $x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$

① - ② 可得 $y' - x' = \sqrt{2}y$ ，即 $y = \frac{y' - x'}{\sqrt{2}}$

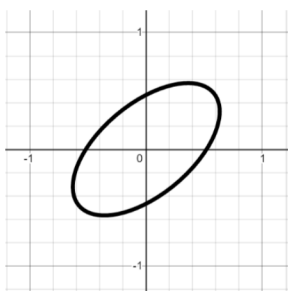
4、將 x 、 y 代入橢圓方程式 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ 中，可得

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 + 5(y'^2 - 2x'y' + x'^2) = 10$$

$$\Rightarrow 6x'^2 - 8x'y' + 6y'^2 = 10$$

$$\Rightarrow 3x'^2 - 4x'y' + 3y'^2 = 5$$

5、故可推得，將長軸在 x 軸的橢圓，逆時針旋轉 θ 角後，可得斜橢圓，且其方程式均可表示為 $ax^2 - bxy + cy^2 = d$ ，圖形如圖一所示。



(圖一)

(二) 吳建生 (1996) 發表在《數學傳播》的文章中提到，二次曲線的方程式均可表示成 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，其判別式為 $b^2 - 4ac$ 。

(表一)

	圖形
$b^2 - 4ac > 0$	雙曲線、兩相交直線
$b^2 - 4ac = 0$	拋物線、兩重和直線、兩平行直線、空集合
$b^2 - 4ac < 0$	圓、橢圓、一點、空集合

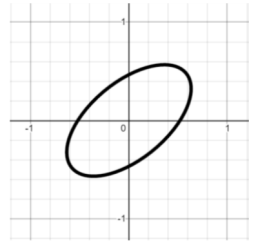
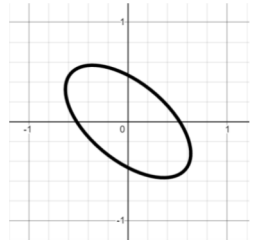
而 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 經由配方法可得 $a(x - h)^2 + bxy + c(y - k)^2 = d$ 的形式。故本研究僅針對二次曲線方程式 $ax^2 - bxy + cy^2 = d$ 中 $b^2 - 4ac < 0$ 的情況，利用數學軟體 Desmos 繪圖後，討論改變係數對於圖形的影響，詳細結果如下。

(三) 研究結果與分析

針對二次曲線方程式 $ax^2 - bxy + cy^2 = d$ 討論如下：

1、在 $b^2 < 4ac$ 前提下，改變 a 、 c 、 d 的正負所形成的圖形，如表二

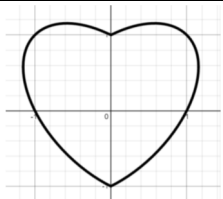
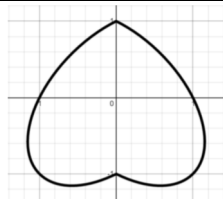
(表二)

	$a \cdot c > 0, d > 0$	$a \cdot c > 0, d \leq 0$	$a \cdot c < 0, d \geq 0$	$a \cdot c < 0, d < 0$
圖形		無圖形	無圖形	

2、討論 $b^2 < 4ac$ 且 $a \cdot c \cdot d$ 均 > 0 時，將 xy 項中的 x, y 加上絕對值後的圖形變化

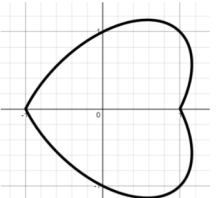
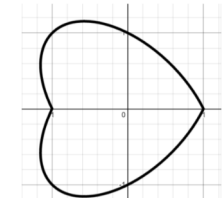
(1) $ax^2 - b|x|y + cy^2 = d$ 中，改變係數 b 的正負所形成的圖形，如表三。

(表三)

	$b > 0$	$b < 0$
圖形		

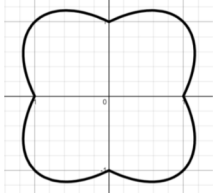
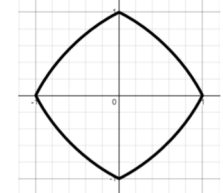
(2) $ax^2 - bx|y| + cy^2 = d$ 中，改變係數 b 的正負所形成的圖形，如表四。

(表四)

	$b > 0$	$b < 0$
圖形		

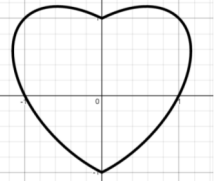
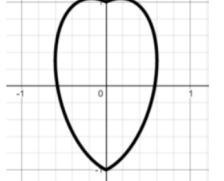
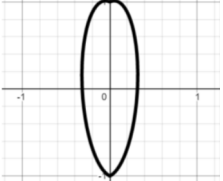
(3) $ax^2 - b|x||y| + cy^2 = d$ 中，改變係數 b 的正負所形成的圖形，如表五。

(表五)

	$b > 0$	$b < 0$
圖形		

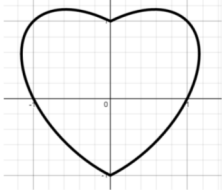
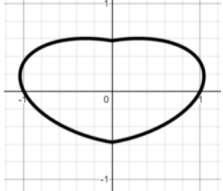
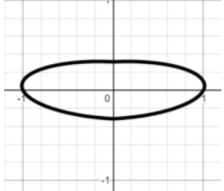
(4) $ax^2 - b|x|y + cy^2 = d$ 中，當 a 數值變大時，圖形會由左右向 y 軸靠近，如表六。

(表六)

	$a = 1$	$a = 3$	$a = 10$
圖形			

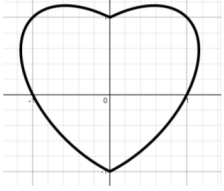
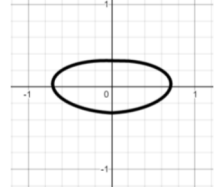
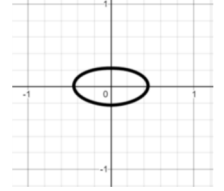
(5) $ax^2 - b|x|y + cy^2 = d$ 中，當 c 數值變大時，圖形會由上下向 x 軸靠近如表七。

(表七)

	$c = 1$	$c = 3$	$c = 10$
圖形			

(6) $ax^2 - b|x|y + cy^2 = d$ 中，當 ac 數值變大，圖形會越來越接近橢圓，如表八。

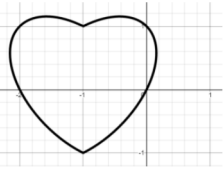
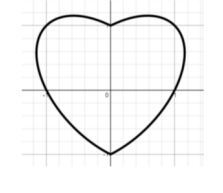
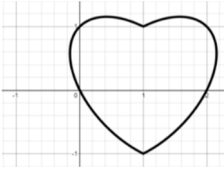
(表八)

	$ac = 1$	$ac = 20$	$ac = 100$
圖形			

3、若將方程式改為 $a(x - h)^2 - b|x - h|(y - k) + c(y - k)^2 = d$

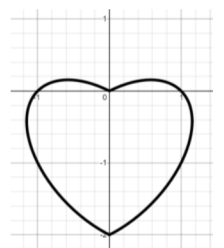
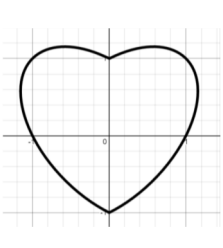
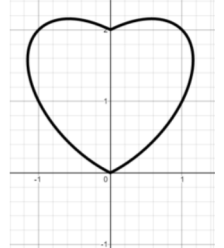
(1) 當 $h > 0$ ，圖形向右平移 h 單位； $h < 0$ ，圖形向左平移 h 單位，如表九。

(表九)

	$h = -1, k = 0$	$h = 0, k = 0$	$h = 1, k = 0$
圖形			

(2) 當 $k > 0$ ，圖形向上平移 k 單位； $k < 0$ ，圖形向下平移 k 單位，如表十。

(表十)

	$h = 0, k = -1$	$h = 0, k = 0$	$h = 0, k = 1$
圖形			

五、結論與生活應用

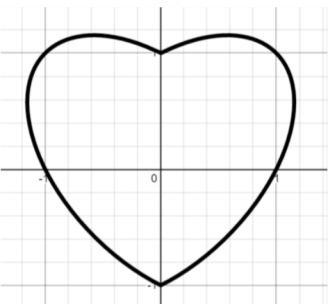
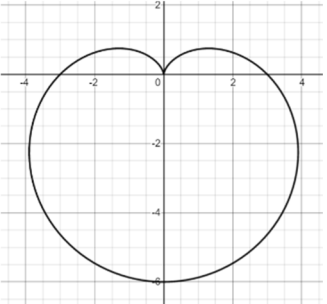
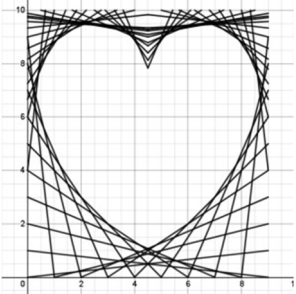
- (一) 在嘗試找出心形函數圖形的過程，發現心形函數圖形可以先利用橢圓旋轉後得到斜橢圓，再將斜橢圓方程式中 xy 項的 x 加上絕對值，會使左半邊的圖形上下翻轉，就能得到正向的心形函數，如上表三。如果將 xy 項中的 y 加上絕對值，會使下半部的圖形左右翻轉，這時就會得到橫向的心形函數，如上表四。由此可知，如果想要畫出心形，只要利用橢圓方程式做變化即可。
- (二) 而調整方程式 $a(x-h)^2 - b|x-h|(y-k) + c(y-k)^2 = d$ 係數的過程中發現，係數 a 是控制圖形的水平伸縮、係數 c 是控制圖形的垂直伸縮；而 h 用來控制圖形的左右平移、 k 則是控制圖形的上下平移。這跟目前高中階段所學過的拋物線以及三角函數的圖形有相同的結果。
- (三) 了解心形函數以及係數對圖形的影響後，便能利用係數與函數的關係，在 Desmos 上畫出現實生活中的雞心蛤。並將高中階段學過的一次函數、二次函數、指數函數、圓及橢圓...等方程式互相搭配使用，畫出台灣黑熊，如表十一。

(表十一)

	圖片	函數圖形
雞心蛤		 用 11 條方程式畫出雞心蛤紋路
台灣黑熊		 用 71 條方程式畫出台灣黑熊


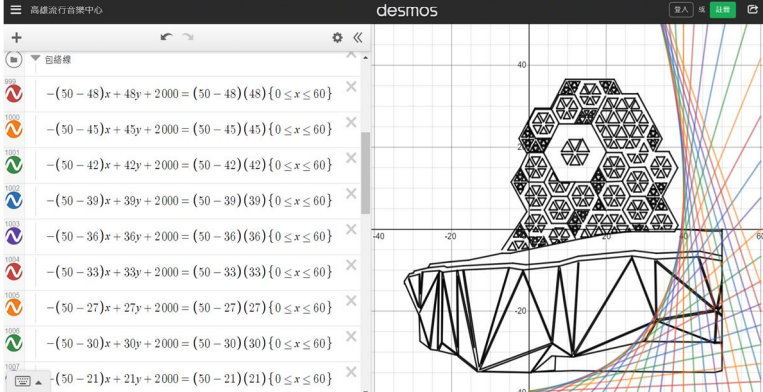
- (四) 除了利用方程式 $a(x-h)^2 - b|x-h|(y-k) + c(y-k)^2 = d$ 畫出愛心，我們也在 Desmos 上畫出有名的心臟線，並嘗試利用包絡線的概念畫出心形圖案，如表十二。

(表十二)

	$a(x-h)^2 - b x-h (y-k) + c(y-k)^2 = d$	心臟線	包絡線
圖形			 用 56 條直線方程式 勾勒出愛心形狀

(五) 最後更利用一次函數搭配包絡線概念，寫了 1025 條方程式，在 Desmos 上呈現出 2022 年台灣燈會中，高雄流行音樂中心美麗的場景，如表十三。

(表十三)

高雄流行音樂中心與函數圖形	
高雄流行音樂中心照片	
函數圖形	

參考資料

- 數學傳播 | 二次曲線新解。2018 年 7 月 10 號。取自 <https://pse.is/425pzd>。
- Desmos | 藝術競賽決賽入圍作品。2020 年 10 月 9 號。取自 <https://pse.is/44vtzv>。
- 包絡線 | 維基百科，自由的百科全書。2009 年 8 月 17 號。取自 <https://pse.is/3ysthr>。
- 蠔宅貝殼工作室 | 雞心蛤。2017 年 11 月 26 號。取自 <https://pse.is/42bxzk>。
- 國語日報 | 新熊讚亮相。2018 年 4 月 19 號。取自 <https://pse.is/44pd8b>。