2022年【全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

大專/社會組 科學文章表單

文章題目： OEIS A274119 數列的故事 (2003 倍數)

文章內容：

故事發生在 2016 年端午節前後，由我與三位愛好數學的網友，一同破解資優數學考題開始，題目：請問$(1\times3\times5\times\cdots\times2001)+(2\times4\times6\times\cdots\times2002)$是否為 2003 的倍數？

平時我的小朋友會分享學校有趣的題目，這題目以電腦程式解題沒太大困難，但個人非數學專業，因此把這題目放在部落格 [1] 上看看有沒有精簡的純數解法，結果網友 z423x5c6 (張展豪，當時即將就讀香港的大學) 提供模算數 (Modular arithmetic) [2] 方法可以輕易證明答案可以整除。

甚麼是模算數？簡單地說除法餘數可以加減乘除，看幾個例子就懂，

$5\div11=0\cdots5$

$2\div11=0\cdots2$

$(5+2)\div11=0\cdots7$

$(5\times2)\div11=0\cdots10$

$(5+11)\div11=1\cdots5$

$(5-11)\div11=0\cdots-6$（事實上餘數是 5）

對於一個合理的除法算式$A\div B=C\cdots D$，數學上除法餘數可以使用右式表示，$A\equiv D \pmod{B}$

只要證明$(1\times3\times5\times\cdots\times2001)+(2\times4\times6\times\cdots\times2002)\equiv0 \pmod{2003}$，就可解出來，

因此

$$
\begin{aligned}
&(1\times3\times5\times\cdots\times2001)+(2\times4\times6\times\cdots\times2002)\\
\equiv\ &1\times3\times5\times\cdots\times2001+(2-2003)\times(4-2003)\times(6-2003)\times\cdots\times(2002-2003) \pmod{2003}\\
\equiv\ &1\times3\times5\times\cdots\times2001+(-2001)\times(-1999)\times(-1997)\times\cdots\times(-1) \pmod{2003}\\
\equiv\ &1\times3\times5\times\cdots\times2001-2001\times1999\times1997\times\cdots\times1 \pmod{2003}\\
\equiv\ &0 \pmod{2003} \quad \text{整除}
\end{aligned}
$$

求解題目時，網友赤子西瓜 (邱巖盛，當時國中生) 發現如下規則，

$(1+2)\div3=1$

$(1\times3\times5+2\times4\times6)\div7=9$

$(1\times3\times5\times7\times9+2\times4\times6\times8\times10)\div11=435$

網友 flyingdusts (孫江山，香港的小學國文老師) 提醒大家，1, 9, 435, ... 在 OEIS 中是一個全新數列，還沒人申請，因此大家聯名登記了這個數列 A273889 [3]。

OEIS (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences，整數數列線上大全)，它是數學家尼爾·斯洛恩 (Neil James Alexander Sloane) 在 1960 年代中開始搜集整數數列，於 1996 年設置網站供大眾查閱，然後每年有上萬件各類研究者提供新數列登錄，從 A273889 就知道這是第 273889 號數列。

計算數列的目的，個人原先以為只是為了科學研究，但研讀一些 OEIS 數列後，才發現有人用它記錄音樂旋律甚至數位圖檔！其實 OEIS 資料庫登記的數列，以排列組合的數量佔最大宗，這個資料庫，現在約以每月上千筆資料的速度在增長。對數列有興趣的朋友都可以研究，甚至小學生也可以參加，不過要會英文及寫程式，只要一張紙一枝筆以及一顆沉靜的心，應該可以尋找到自己的數列，就像天文學家在浩瀚星空中尋找未名的星星一樣。

不過請注意，OEIS 是一個世界性的數列資料庫，許多科學論文與其連結，因此它要求刊登的內容必須正確無誤，並且具有實質意義的數列，而非硬湊出來的，除了內容說明以英文撰寫外，一般還須附上程式，如果知道公式也可以附上，建議數列項目 100 項以上，可以與他人聯名發表，並以真名發表，否則不會正式刊登。

在登錄 A273889 數列後，由於 z423x5c6 遲未申請 OEIS 帳號，無法將他同列數列作者群中，等他申請好了要加名，OEIS 專家多數人持反對態度，並不認同他的數學證明貢獻就可以列名，因此鼓勵他另外申請一個他發現的三重階乘的 A274117 [4] 數列，

$(1 + 2) \div 3 = 1$

$(1\times4\times7 + 2\times5\times8) \div 9 = 12$

$(1\times4\times7\times10\times13 + 2\times5\times8\times11\times14) \div 15 = 1064$

同時，網友 z423x5c6 也發現 IBM 的研究員 Chai Wah Wu 受到 A273889 證明的啟發又找出數列 A273983 [5]，表示這系列數列的新發現受到專家肯定，他發現的數列是，

$(2\times4 - 1\times3) \div 5 = 1$

$(2\times4\times6\times8 - 1\times3\times5\times7) \div 9 = 31$

$(2\times4\times6\times8\times10\times12 - 1\times3\times5\times7\times9\times11) \div 13 = 2745$

受到這些數列研究的啟示，想找一個可以整合這些數列的公式，想出來之後，又再想有沒有通式可以整除，結果還真被想到，

因為 $$\prod_{i=0}^{n}(ik+a) - \prod_{i=0}^{n}(ik+b) \equiv 0 \quad [\bmod\,(nk+a+b)]$$

定義 $$B(n,k,a,b) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(ik+a) - \prod_{i=0}^{n}(ik+b)}{nk+a+b}$$

$$nk+a+b \neq 0, \quad n \in \mathbf{Z}_0^+, \quad k,a,b \in \mathbf{Z}$$

A274119 [6] 是第一個以公式申請的數列，它是 $B(4,k,2,1)$

$(2\times2\times2\times2\times2 + 1\times1\times1\times1\times1) \div 3 = 11$

$(2\times3\times4\times5\times6 + 1\times2\times3\times4\times5) \div 7 = 120$

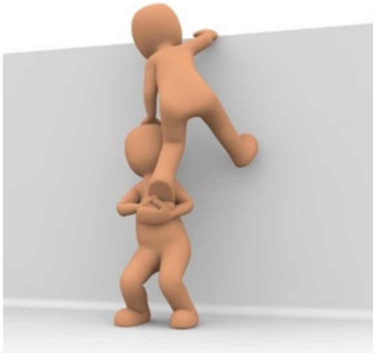
$(2\times4\times6\times8\times10 + 1\times3\times5\times7\times9) \div 11 = 435$

以及第二個數列 A274136 [7]，它是 $B(2n+1,1,2,1)$

$(2\times3 - 1\times2) \div 4 = 1$

$(2\times3\times4\times5 - 1\times2\times3\times4) \div 6 = 16$

$(2\times3\times4\times5\times6\times7 - 1\times2\times3\times4\times5\times6) \div 8 = 540$



圖片來自 Pixabay
作者 Peggy und Marco Lachmann-Anke

最後補充一些花絮，申請 A273889 數列時，網友 z423x5c6 未能列名，個人覺得非常遺憾，如果沒有他的幫助是不可能找到這麼多數列，因此在 OEIS 討論版以事實陳述並強烈推舉 z423x5c6 的貢獻，終於獲得 Sloane 首肯而名列作者群中，從這裡學到的經驗是正面的貢獻可以極力爭取應有的榮耀。還有申請數列過程，了解台灣部落格文，美國竟然沒辦法直接閱讀，竟然要七十多歲的 Sloane 翻牆過來，光想像這畫面就又為這篇故事橫添一筆趣味！

目前找出這些數列的感想為，以前大家都是在尋找一維的數列變化，但以後可能會出現很多這類二維數列 (數列之間的關係)，這算是這系列數列的創舉。此外，數學的研究並非數學家專屬，像美國第 20 任總統加菲爾德就曾獨自喝咖啡對著壁爐板發呆時，靈感一來，想到一個簡單方法能夠證明畢氏定理，而我們這群數學愛好者以群體智慧找出許多數列，因此只要你有興趣並留意生活周遭，會有意想不到的機會與收穫，更多補充內容請觀看影片作品。

參考資料
1. 4rdp 研發養成所部落格 - http://4rdp.blogspot.com/2016/05/99-2003.html
2. 維基百科模算數 - https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A8%A1%E7%AE%97%E6%95%B8
3. OEIS 數列 A273889 – https://oeis.org/A273889
4. OEIS 數列 A274117 – https://oeis.org/A274117
5. OEIS 數列 A273983 – https://oeis.org/A273983
6. OEIS 數列 A274119 – https://oeis.org/A274119
7. OEIS 數列 A274136 – https://oeis.org/A274136