

## 2023 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

教師組 教案表單與學習單

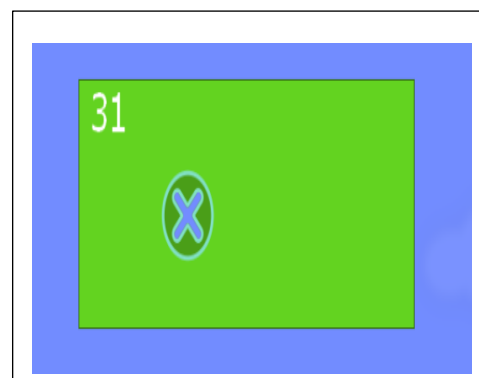
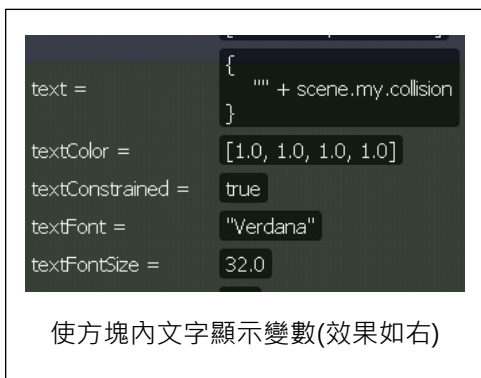
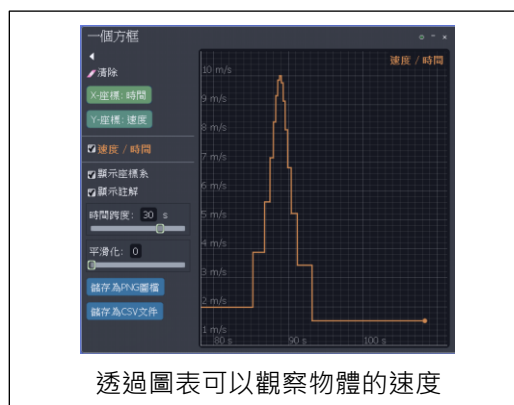
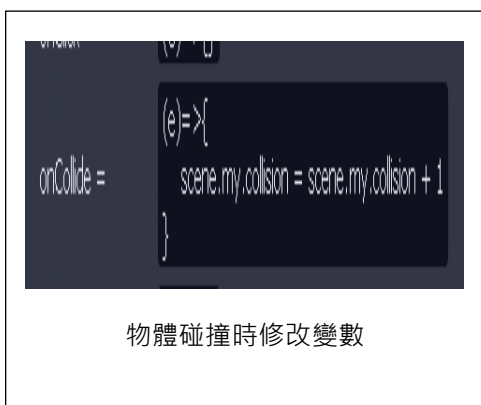
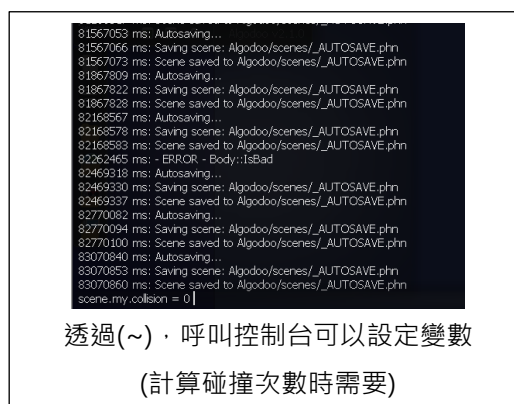
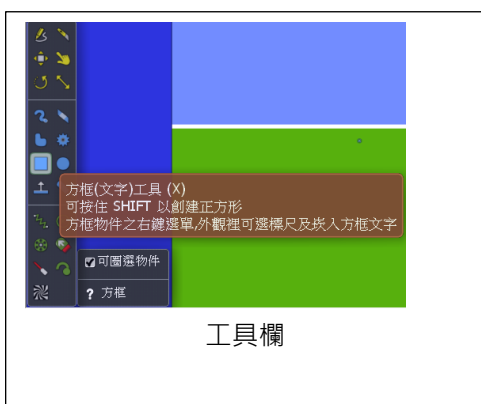
|   |
|---|
| <b>教案設計者：</b> 彭偉豪(國立中央大學師培生)、邱湘芸(國立中央大學師培生)   |
| <b>課程領域：</b>  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 物理 <input type="checkbox"/> 化學 <input type="checkbox"/> 生物 <input type="checkbox"/> 地球科學 <input type="checkbox"/> 科技領域 <input checked="" type="checkbox"/> 自然科學探究與實作<br><input checked="" type="checkbox"/> 數學 <input type="checkbox"/> 其他_____ (可複選)   |
| <b>一、教案題目</b>   |
| 碰出圓周率   |
| <b>二、授課時數</b>   |
| 四節課，共 200 分鐘  |
| <b>三、教案設計理念與動機</b>  |
| <p>資訊科技融入教學現場的情形越來越普遍，但只使用電腦無法達成探究式的學習，因此教師需要在課堂中指引學生學習，藉由資訊科技，教學過程不僅更具互動性，更能在教學過程中培養學生科技素養。本教案使用預測 (Prediction)、模擬 (Simulation)、觀察 (Observation)、解釋 (Explanation)的探究式學習 (PSOE)教學策略，藉由在 Algodoo 軟體模擬執行困難或無法實際執行的實驗，讓學生觀察並理解較為抽象的現象與概念。學生可以自行繪製物件與改變建置環境中的各項設定，像是重力、密度、材質等，藉由比較不同環境與設定的模擬結果，可以強化課堂中所教導的學習概念。</p> <p>教案內的素材取材自 G. GALPERIN 在 2003 年發表的論文(PLAYING POOL WITH <math>\pi</math> (THE NUMBER <math>\pi</math> FROM A BILLIARD POINT OF VIEW)，此實驗的結果巧妙的將物理中的彈性碰撞與數學中的圓周率產生連結，3Blue1Brown(YouTube 從獨特視角介紹高等數學的頻道)在 2019 年介紹此題材後也引起眾人討論這個實驗的結果，其中解釋不乏使用線性代數等高等數學，但也能透過高中數學巧妙的將其中的特徵在代數與幾何間轉換，進而解釋出實驗的結果。此教案的設計希望學生能從探究的過程中，發現並欣賞這個巧妙的連結，且能嘗試透過既有的知識去嘗試進行分析，將自己的想法合理的論述出來。</p> |
| <b>四、教學目標</b>   |
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. 能透過電腦軟體的輔助來驗證彈性碰撞的概念(碰撞前後動量守恆、總動能守恆)。</li><li>2. 能自行設計實驗情境，做出預測並透過電腦軟體進行模擬。</li><li>3. 能將模擬時所觀測到的現象進一步做出合理的解釋。</li></ol>   |
| <b>五、教育對象</b>   |
| 高二學生  |
| <b>六、課程設計 (方法與步驟)</b>   |

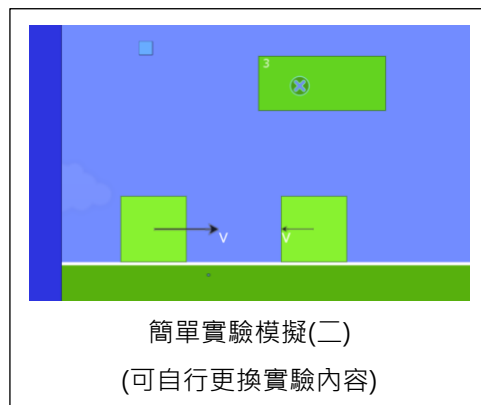
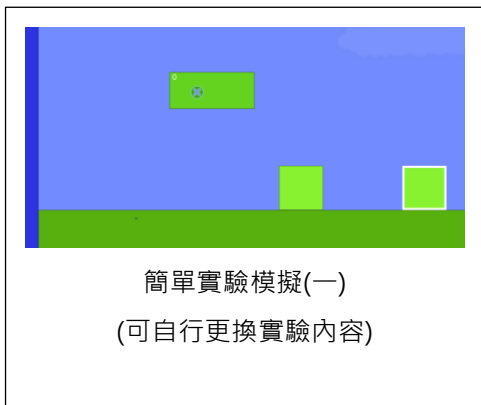
## 第一節：Algodoo - 2D 物理模擬軟體與操作練習

### 【課前準備】安裝 Algodoo 軟體、學生複習彈性碰撞相關內容

1. 引起動機：透過提問「在學習碰撞這個單元的時候，我們會提到撞球或是各種球類的碰撞來作為例子，但你確定碰撞的過程和結果一定符合課本的說法嗎？若是兩種有很大差異的物品發生碰撞的時候會是什麼樣子呢？」引起學生的思考，並讓學生明白：我們可以透過科技的輔助(電腦軟體的模擬)，來去驗證我們所學到的到底合理不合理，並且能夠去觀察平時生活中無法觀察到的情境。
2. Algodoo 軟體操作介紹：教師簡單介紹在未來探究過程可能需要用到的功能(如下列)，並模擬簡易實驗提供學生參考(例：斜面上物體的摩擦力)。

項目：左下工具欄各式工具、控制台(設定變數)、Script 腳本(onCollide 碰撞時讓變數加一)、方塊內輸入文字、材質(密度、材質、彈性、摩擦力)、速度、幾何行為、顯示圖表





3. 教師簡單複習彈性碰撞的概念，並請同學完成評量內容的問題 1。

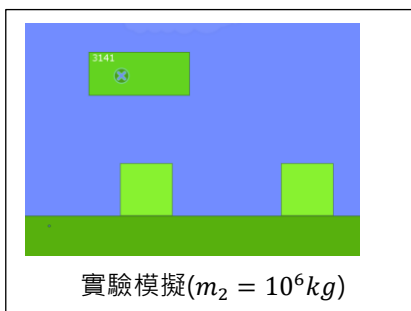
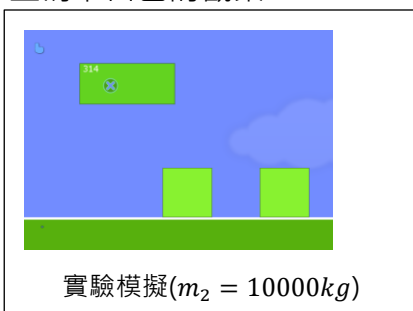
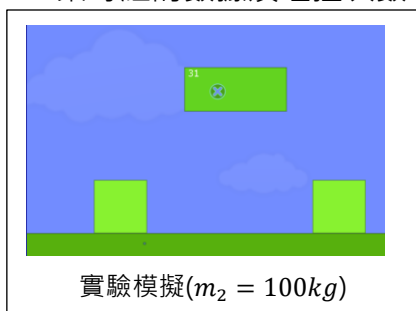
註：有無取消空氣摩擦力與浮力、材質的彈性、摩擦係數都會影響模擬的結果，在介紹軟體時須提醒學生注意。

第二節：

1. 學生接續上週課程結束後完成的問題 1 所設計的實驗，透過操作 Algodoo 將其呈現出來，並且接續完成問題 2(教師此時扮演從旁協助解決問題的角色，確保每位學生都有能力順利完成此部分)。
2. 請學生預測並透過 Algodoo 觀察問題 3 的情境：假設我們依然有兩個物體，並且在左方有一面牆，左、右的物體質分別為 $m_1$ 、 $m_2$ ，這三個物體之間發生的碰撞仍然是彈性碰撞，且右邊的物體以等速度向左邊的物體前進，則當兩物間的質量關係分別為 $m_1 > m_2$ 、 $m_1 = m_2$ 、 $m_1 < m_2$ 時，兩個物體發生碰撞後的運動情形與碰撞發生的次數為何？在問題 3 中紀錄預測的結果，並在問題 4 中嘗試去說明所觀察到的現象其背後的原因。(至此皆為課綱內容，預期學生有能力完成至此部分)

第三、四節：

1. 教師在黑板上簡單與學生討論上週問題三觀察的結果，藉由 $m_1 < m_2$ 時，兩物會發生多次的碰撞，引導學生猜測若兩物體之間的質量差距越來越大，碰撞次數是否會出現變化？(問題 5)
2. 教師操作 Algodoo 模擬上述情形( $m_1$ 為 1kg，改變 $m_2$ 為 $10^n$ ， $n = 0,1,2,3,4,5,6$ )，請學生觀察每組的數據及碰撞次數，並寫下自己的觀察。



3. 將學生分為 5-6 人一組(異質化分組佳，每組希望具有擅長物理及擅長數學的學生，並選出一位組長)，請學生嘗試去分析、討論上面的觀察背後的原因。  
(此時教師負責引導學生，當學生毫無頭緒時，可以透過提問引導能夠從何處進行分析，而非直接告訴學生下個步驟)

※此部分的分析較為困難，尤其有些做法牽涉到數學的代數與幾何間的轉換，學生未必能自行理解並做出轉換，因此這部分並非評量的重點，而是希望學生能欣賞兩個學科巧妙的連結、能夠完整的表達自己的想法，並且想法合理即可。

※在小組討論分析時，可能會用到一些課綱外的工具，教師可以適時的補充並提供說明。  
小角度近似：在角度以弧度表示，且角度很小的情形下，角度會近似部份三角函數的值。

$$(\text{當 } \theta \rightarrow 0 \text{ 時，} \sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta)$$

積化和差：

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

4. 在第四節上課前，請組長將討論的進度及內容拍照上傳，供教師參考以適時進行課程的調整。(若討論的情形不理想，可以由教師引導從兩個物體的速度關係轉換為幾何來進行分析)
5. 學生在小組討論完成後，每個人將完成的學習單(問題 1 至問題 7)交回，作為評量的依據。

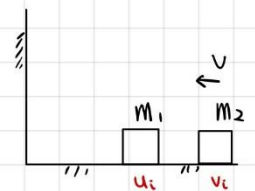
## 七、學習評量內容

1. 我們學過關於彈性碰撞的概念，若兩個物體進行彈性碰撞，則碰撞前與碰撞後整個系統的動量會守恆、總動能也不會改變，請你設計實驗、參數與要記錄下的數據，使得你的實驗與數據可以透過 Algodoo 軟體來驗證在彈性碰撞的情形下，動量與總動能是否真的守恆。
2. 承問題 1，請將數據紀錄下來，並且驗證動量與總動能是否守恆。
3. 假設我們依然有兩個物體，並且在左方設置一面牆壁，左、右的物體質量分別為  $m_1$ 、 $m_2$ ，這三個物體之間發生的碰撞仍然是彈性碰撞，且右邊的物體以等速度向左邊的物體前進，請你預測並透過 Algodoo 觀察：當兩物間的質量關係分別為  $m_1 > m_2$ 、 $m_1 = m_2$ 、 $m_1 < m_2$  時，兩個物體發生碰撞後的運動情形與碰撞發生的次數為何？
4. 承問題 3，請問你的預測和實際模擬出的觀察是否吻合？你可以解釋原因嗎？
5. 我們從上一次的模擬發現，當  $m_1 < m_2$  時，會發生多次的碰撞，若是兩物體之間的質量

差距越來越大，則碰撞次數會有變化嗎？寫下你的預測。

6. 承問題 6，透過 Algodoo 模擬並觀察當質量改變時的變化(不妨假設  $m_1$  為 1kg，改變  $m_2$  為  $10^n$ )，你有什麼發現？
7. 承問題 7，請和小組夥伴討論，你有沒有辦法解釋你的發現？寫下你們的想法。  
(下圖為此題參考解答)

碰撞次數



動量守恆:  $\vec{P} = m_2 \vec{v}$

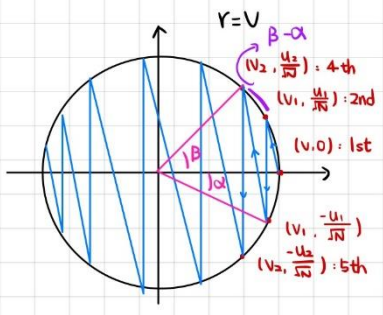
動能守恆:  $E_k = \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u_i^2 + \frac{1}{2} m_2 v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 u_i^2 + \frac{1}{2} m_2 v_i^2$

令  $m_2 = N m_1$ , i.e.  $N = \frac{m_2}{m_1}$

Then  $E_k = \frac{1}{2} m_1 u_i^2 + \frac{1}{2} N m_1 v_i^2 = \frac{1}{2} N m_1 v^2$

$\Rightarrow u_i^2 + N v_i^2 = N v^2$

$\Rightarrow v_i^2 + \left(\frac{u_i}{\sqrt{N}}\right)^2 = v^2$  is a circle. (1)



動量守恆:  $N m_1 v_i - m_1 u_i = N m_1 v_{i+1} - m_1 u_{i+1}$  (2)

From (1):  $\left(\frac{v_i}{v}\right)^2 + \left(\frac{u_i}{v\sqrt{N}}\right)^2 = 1$  unit circle

Let  $\cos \alpha = \frac{v_i}{v}$ ,  $\sin \alpha = \frac{u_i}{v\sqrt{N}}$

$\cos \beta = \frac{v_{i+1}}{v}$ ,  $\sin \beta = \frac{u_{i+1}}{v\sqrt{N}}$

(2) imply:  $N v_i - u_i = N v_{i+1} - u_{i+1}$

$\sqrt{N} \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{N} \cos \beta - \sin \beta$   $\Rightarrow -\cot \frac{\beta - \alpha}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{N} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\beta - \alpha}{2}$ : 常數  $\Rightarrow \beta - \alpha$  也是常數

$\frac{\beta - \alpha}{2} = \cot^{-1} \sqrt{N} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$  when  $\theta \rightarrow 0$

$\Rightarrow \beta - \alpha = \frac{2}{\sqrt{N}}$

$\therefore$  共有  $2\pi \div \left(\frac{2}{\sqrt{N}}\right) = \pi\sqrt{N}$  個  $\beta - \alpha$  i.e. 碰撞了  $\pi\sqrt{N}$  次

### 參考資料

1. How colliding blocks act like a beam of light...to compute pi. - 3Blue1Brown YouTube 頻道。

<https://www.youtube.com/watch?v=brU5yLm9DZM>

2. The most unexpected answer to a counting puzzle - 3Blue1Brown YouTube 頻道。  
<https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs>
3. 如何從碰撞過程求圓周率 $\pi$ ？壹個奇妙的物理、代數、幾何結合問題 - 李永樂老師 YouTube 頻道。  
<https://www.youtube.com/watch?v=Un7mK05b9oA>
4. 碰撞中為什麼會有 $\pi$ ？如果是高考物理附加題你會解嗎？ - 媽咪說 MommyTalk Youtube 頻道。  
<https://www.youtube.com/watch?v=exwimJ07tOI>
5. 【Fun 科學】碰撞 $\pi$ 解答(最佑屬性的解法喔~) - 佑來了 YouTube 頻道。  
<https://www.youtube.com/watch?v=bNBT5w6zRYc>
6. 彈性碰撞 - 維基百科  
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%BD%88%E6%80%A7%E7%A2%B0%E6%92%9E>
7. 在意想不到的地方遇見 $\pi$   
<https://www.thenewslens.com/article/115749>
8. 張立杰、黃若瑜，2017 年，《PSOE 模式：預測、模擬、觀察、解釋的科學探究活動設計》，教育科技與學習第五卷 第二期。

註：

1. 教學教案總頁數以 8 為上限。
2. 除摘要外，其餘各項皆可以用文字、手繪圖形或心智圖呈現。
3. 未使用本競賽官網提供「教案表單與學習單」格式投稿，**將不予審查**。
4. 建議格式如下：
  - 中文字型：微軟正黑體；英文、阿拉伯數字字型：Times New Roman
  - 字體：12pt 為原則，若有需要，圖、表及附錄內的文字、數字得略小於 12pt，不得低於 10pt
  - 字體行距，以固定行高 20 點為原則
  - 表標題的排列方式為向表上方置中、對齊該表。圖標題的排列方式為向圖下方置中、對齊該圖