

題目名稱: Spin liquid 轉動阻礙
一、摘要
組員起初於無意間之下轉動未加水的圓盤，圓盤隨時間的經過開始傾斜重心位置越來越低、音頻越來越高。彼此討論後對於圓盤內加水轉動的結果感到好奇，因此開始對圓盤的進動研討及實驗的驗證，依序以六種水量觀察其變化，用手機錄製實驗影片，接著透過 excel、tracker、python 等軟體完成資料分析、圖表建立……，更重要的是：觀察圓盤內水在第一、第二、第三階段的分布情形。藉由公式分析圓盤質心變動情況，質心變動所牽涉的能量轉換造成一系列神奇的結果。
二、探究題目與動機
某天無意於短片中一特殊玩具，稱之歐拉盤(Euler's disk)，由簡單的圓盤和光滑底板構成。歐拉盤的運動狀態如同硬幣旋轉，但更為持久，不禁思考，若圓盤為空心且在圓盤內裝水會是什麼效果？因此找到一款硬幣收納盒，以此作實驗並且印證假說。
三、探究目的與假設
目的一:旋轉時盤內水的形狀探討 目的二:不同液體量與圓盤維持轉動的時間探討 目的三:理論探討質心變動與實驗結果是否相符 假設一:造成轉動時間不同的影響力中圓盤空間中的含水比例大於其空間中水的重量 假設二:旋轉後開始傾斜的剎那圓盤內的水為圓環狀 假設三:造成轉動時間的長短來自於轉動時空間中水移動造成的質心變動
四、探究方法與驗證步驟
一、研究設備及器材 硬幣圓盒(裝滿水量約 6 克)、自來水、游標尺、厚度測量儀、電子秤、白紙、電腦、手機
二、研究架構
<pre> graph TD A[觀察不同水量時圓盤的轉動狀態] --> B[拍攝並分析旋轉時水的形狀] A --> C[拍攝圓盤隨時間進動] C --> D[分析轉動後質心移動的速度] C --> E[分析轉動後圓盤下落的時間] </pre>

三、研究方法

(一)簡述:

為了使圓盤轉動同時追求數據精準，機器無疑是最好的選擇，但根據前人的經驗發現，不管是以打擊還是以馬達驅使圓盤轉動都會造成穩定性不足，若精準數據的前提是擁有良好的控制力，那綜合來說手轉成為了最佳選擇。

(二)實驗過程。

1. 測量圓盤基本數據(例如:厚度、外徑、重量……)
2. 降低實驗誤差(發射含水圓盤的秒數)
3. 使用 Excel 填寫及計算所需數據
4. 架設手機拍攝 7 種水量的轉動
5. 使用 Tracker 追蹤運動軌跡
6. 利用 python 編寫程式繪出圖表

(三)實驗步驟

1. 鋪上一張 A4 紙
2. 在其上用單手固定圓盤頂部
3. 另一肢手彈射圓盤邊緣處
4. 觀查其轉動是否移動且穩定
5. 紀錄不移動且穩定的資料

四、分析旋轉時盤內水的形狀

(一)簡述:

由分析結果印證了假設二:旋轉後開始傾斜的剎那圓盤內的水為圓環狀

(二)自轉軸垂直於地面(第一階段)

含水圓盤在開始自轉的時候，盤內的水會受到旋轉時所產生的離心力，這時其形狀為一凹槽，其凹槽依據施力大小與水量多寡造成其深度有所不同(如圖 7)，這時自轉軸與運動方向垂直，水受到地心引力向下的力，猜測此時實驗中盤內水的離心力還不足以抵抗重力形成水環。



圖 7(白點為圓心參考點)

(三)自轉軸傾斜並且開始做進動(第二階段)

此時圓盤傾斜，猜測水受到平行於圓盤的水重力分力影響，而其水重力分力對水的拉力小於自轉軸垂直地面時完整的水重力拉力，結果實驗中離心力克服了水重力分力形

成水環(如:圖 8)。



圖 8(傾斜時的狀態)

(四)能量耗盡、停止不動(第三階段)

最後傾斜角過大，與平面產生巨大的摩擦力，使物體停止，猜測由於在圓盤停止前自轉與進動皆未停止，並且水與圓盤內壁具有吸附力，結果實驗中吸附力與離心力造成其最後結果仍然為一水圓環(如:圖 9)。

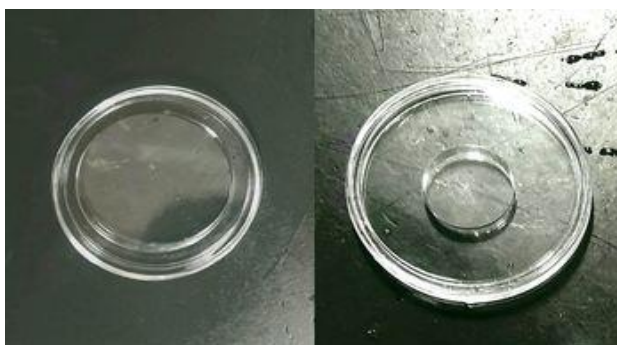


圖 9(倒地時圓盤狀態)

五、不同液體量與圓盤維持轉動的時間探討

(一)簡述:

由實驗結果印證假設一:造成轉動時間不同的影響力中圓盤空間中的含水比例大於其空間中水的重量。

(二)水量與時間的規律

藉由重複發射不同水量的圓盤我們發現到其時間大致有一規律(如:圖 10)，沒有水時的平均時間是所有水量中維持最久的，而當水量持續增加到空盤體積的一半時，反而一下子就停止轉動，在繼續增加水量後又是一個不可思議，平均時間居然往上攀升，雖然在全裝滿水時的秒數，還是比空盤轉動時來的短，但時間已相當的接近。實驗結果代表轉動與水量的多寡大體具有相關性。

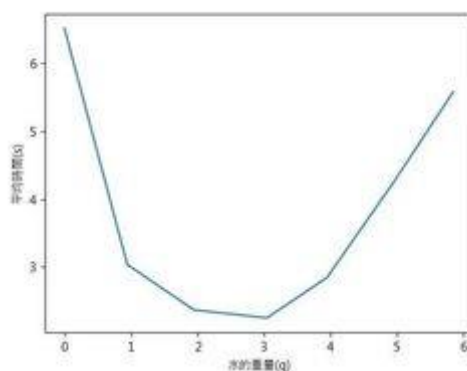


圖 10 水重與轉動時間關係圖

(三)影響力:水的重量 VS 圓盤空間中的含水比例

在水量與時間規律的結果下雖然我們認為重量與含水量皆會影響維持運動的秒數，但當我們假設重量為主要影響因素時，在編號越高則水量越多也就是重量越重的狀況下應該要是滿水圓盤維持轉動的時間最短，但實驗結果表明並非如此，因此我們猜測

圓盤空間中的含水比例影響力高於重量的影響。

五、分析質心的變動

(一)簡述：

以公式推導數據帶入分析符合假設三：造成轉動時間的長短來自於轉動時空間中水移動造成的質心變動。

(二)假設回顧：

由實驗觀查印證的假設二 得知，轉動未傾斜時質心未於圓心下，傾斜後(形成水環)質心位於圓心。

(三)公式推導

<p>圖 13(a)水量等於一半 質心變動示意圖</p>	<p>圖 13(b)水量小於一半質心 變動示意圖</p>	<p>圖 13(c)水量大於一半質心 變動示意圖</p>

符號介紹：O 圓心，R 半徑，dm 小質量，M 總質量， σ 水密度

1. 探討圓盤水量等於半圓時質心的變動情況如圖 13(a)

圓心位置為原點，所以質心位置就是相對於原點的距離，將質心位置 r_{cm} 定義為總質量倒數乘上每個小質量對位置向量的積分：

$$r_{cm} \equiv 1/M \cdot \int \vec{r} \cdot dm$$

而每個小質量為密度乘上截面積微分，而截面積可視為長方形，而因為圓形左右對稱，所以截面積為 $dx \cdot 2y$ ，y 可用畢氏定理求得

$$dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot dx \cdot 2y = \sigma \cdot dx \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

最後再將 dm 帶入定義中求得初始質心位置：

$$r_{cm} = 1/M \cdot \int x \cdot 2\sigma\sqrt{R^2 - x^2} dx = 1/M \cdot 2\sigma (R^2 - x^2)^{(3/2)} / 3 \Big|_0^R = 2\sigma R^3 / 3M = 4R/3\pi$$

2. 探討圓盤水量小於半圓時質心的變動情況如圖 13(b)

當體積相同但質量改變時質心位置可相加減求得，當水量少於 3ml 時質心位置 r_{cm} 會等於水量為 3ml 的質心位置扣掉綠色面積，也就是原本有含水而現在不含水的質心位置，而綠色面積的質心位置也是帶入 r_{cm} 的定義，但是積分時要設上下限為 0 到 D 之間，

而大於 3ml 時的質心位置也是相同算法：

$$\begin{aligned} r_{cm} &= r_{3ml} - r_{\text{移}} = 4R/3\pi - 1/M \cdot 2\sigma (R^2 - x^2)^{(3/2)}/3 \Big|_0^D \\ &= 4R/3\pi - 1/M \cdot 2/3 \cdot 2M/\pi R^2 \cdot [(R^2 - D^2)^{(3/2)} - R^3] \\ &= 8R/3\pi - 4/3\pi R^2 \cdot (R^2 - D^2)^{(3/2)} \end{aligned}$$

3. 探討圓盤水量大於半圓時質心的變動情況圖 13(c)

$$\begin{aligned} r_{cm} &= r_{3ml} + r_{\text{移}} = 4R/3\pi + 1/M \cdot 2\sigma (R^2 - x^2)^{(3/2)}/3 \Big|_0^D \\ &= 4R/3\pi + 1/M \cdot 2/3 \cdot 2M/\pi R^2 \cdot [(R^2 - D^2)^{(3/2)} - R^3] = 4/3\pi R^2 \cdot (R^2 - D^2)^{(3/2)} \end{aligned}$$

(四)分析結果

1. 簡述：

(1) 依實驗測量結果圓盤半徑為 23.01mm

(2) 由計算結果可知原質心距離圓心最遠距離為 9.7657mm，因此在水量 3ml 時質心離圓心最遠，若再增加或減少水量，質心則會漸漸靠近圓心。

表四、質心與圓心距離 D 和半徑 R

	R(mm)	D(mm)
圖 13(c)大於 3ml	23.01	0<D<23.01
圖 13(a)等於 3ml	23.01	0
圖 13(b)小於 3ml	23.01	0<D<23.01

2. 大於 3ml 時質心的位置到圓心的距離

依據圖 13(c) 在水量大於半圓的公式 $4/3\pi R^2 \cdot (R^2 - D^2)^{(3/2)}$ 中 $R=23.01$ ， $0<D<23.01$ ，可算出原質心到原心距離小於 0 大於 9.7657mm

3. 小於 3ml 時質心的位置到圓心的距離

依據圖 13(c) 在水量等於半圓的公式 $8R/3\pi - 4/3\pi R^2 \cdot (R^2 - D^2)^{(3/2)}$ 中 $R=23.01$ ， $D=0$ ，可算出原質心到原心距離等於 9.7657mm。

4. 等於 3ml 時質心的位置到圓心的距離

依據圖 13(c) 在水量小於半圓的公式 $4R/3\pi$ 中 $R=23.01$ ， $0<D<23.01$ ，可算出原質心到原心距離小於 0 大於 9.7657mm。

(五)能量轉換分析與時間比較

1. 簡述：

質心變動越大消耗能量越大，由此可知持續轉動的時間也越短，符合實驗結果和假設三。

2. 水量等於 3ml

當加水到一半時，質心離圓心 9.77mm(最大距離)，在形成水環後位能變動相對於其他水量時來的大，因此在旋轉時給與質心上升的位能最大，剩餘的能量最小。

3. 水量小於 3ml

如圖 12(a)由於僅有一點水加入，其一開始的質心僅向下離圓心小於 9.77mm 的距離，

因此在形成水環後，質心位能的變動相對於一半時來的小，剩餘的能量較多。

4. 水量大於 3ml

如圖 12(a)水量大於一半時，因上半圓有水，其一開始的質心依計算為向下離圓心小於 9.77mm 的距離，因此在形成水環後，質心位能的變動也相對於一半時來的小，剩餘的能量也較多。

五、結論與期望

一、結論

(一)轉動後水的形狀

在轉動一開始並未形成水環，而在傾斜的剎那形成水環，最終仍然保持水環的形狀靜止。

(二)加水量造成之影響

未加水時轉動能夠持續的時間最長，隨著加水量的增加圓盤進動的時間逐漸減少，當加水量達圓盤容積 50%時進動時間最短，當加水量超過圓盤容積 50%後，隨著加水量的增加進動時間逐漸增加，整體進動時間呈現一個先降後升的趨勢。

(三)轉動時能量轉換

起初圓盤質心位於圓心下方，變動後的距離為維持轉動時間長短的依據，以此印證假設符合實驗結果。

二、期望

(一)找出加水後能使歐拉圓盤最穩定旋轉的適合水量

(二)可嘗試利用穩定發射器進行歐拉圓盤之發射，降低實驗誤差

(三)探討若彈擊瞬間初始角度 $\theta \neq 0$ (如 $\theta = 30$ 、 $\theta = 60$ 、 $\theta = 90$ 、 $\theta = 135$) 不同，將會如何影響圓盤進動過程。

六、參考資料

(一)、中文文獻

國立台中教育大學 NTCU 科學教育與應用學系科學遊戲實驗室。歐拉盤。取自 <http://scigame.ntcu.edu.tw/power/power-043.html>

(二)、英文文獻

Cross, R. (2012). Rolling motion of a ball spinning about a near-vertical axis. *The Physics Teacher*, 50(1), 25-27.

Andersen, W. L. (2007). Noncalculus treatment of steady-state rolling of a thin disk on a horizontal surface. *The Physics Teacher*, 45(7), 430-433.

Stanislavsky, A. A., & Weron, K. (2001). Nonlinear oscillations in the rolling motion of Euler's disk. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 156(3-4), 247-259.