

2023 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

教師組 教案表單與學習單

教案設計者： 何敏華(臺北市立大同高中)
課程領域：
<input type="checkbox"/> 物理 <input type="checkbox"/> 化學 <input type="checkbox"/> 生物 <input type="checkbox"/> 地球科學 <input checked="" type="checkbox"/> 科技領域 <input type="checkbox"/> 自然科學探究與實作 <input checked="" type="checkbox"/> 數學 <input type="checkbox"/> 其他_____ (可複選)
一、教案題目
生活中旋轉曲面的探究與實作
二、授課時數
50 分鐘*6 節
三、教案設計理念與動機
數學也可以探究! 數學除了計算、演譯特質外，還包含猜測、估算與觀察樣式，許多數學概念可以透過觀察、模擬、猜想與實驗來建立，這就是所謂數學的探究與實作。於是在多元選修的課程中，設計了「旋轉曲面的探究與實作」單元，期望在理性論述中，建構由平面走向立體的探究主題，包括數學的知識內容提問與表徵，再經過觀察生活中的物件進行實作設計，讓學生可以有更多動手做數學的「做中學」機會，最後再結合擴增實境 AR 的展現與應用，讓數學不僅在生活中被創造，更在生活中展現數學的創造力與想像力。
教學現況 高中生的立體思維，常常因為空間想像能力不足、對幾何形狀和空間規律只掌握了部分不夠全面，因此難以想像出立體形狀的具體樣貌和特徵，對複雜的立體形狀和空間關係缺乏深入的理解和應用能力，尤其在記憶和應用分離的情況下，學生常常僅僅依靠死記硬背的方法來記憶幾何定理和公式，而缺乏實際應用和練習的能力。那麼，如何設計課程讓學生由平面思維轉成立體思維的培養過程，能對實際應用場景的把握、轉化能力上有充分練習的機會。
四、教學目標
立體思維是數學、物理和工程學等領域的基礎和核心能力之一，也是設計、建築、製造、機械、電子等許多職業所需的重要技能，在廣泛的生活應用價值上，例如，購物時選擇合適的容器、整理行李時最大限度利用空間、組裝傢俱等，都需要立體思維能力的支持。立體思維培養學生的空間想象力和邏輯思維能力，進而提高學生的智力發展。更有助於學生綜合運用不同的數學概念和知識解決問題，尤其是當問題涉及到三維空間時，有效地分析問題，發現問題的本質，提出有效的解決方案。 在數學教學領域的眾多分支中，要從平面圖形過度到空間立體思維，樹立如何從矩形、三角形、梯形，變成柱體、錐體，學生想像的元素會多於老師教的成份，學生實做的感知力

更大於抽象的想像力，因此就會有許多直觀性教具或科技來輔助理解。然而對於較複雜的形體，例如電風扇、椰子樹等，學生該如何以基礎的幾何結構，透過層層方程式、曲線或幾何原形的拆解、反射、伸縮、旋轉來建立，這就需探究實作的歷程來培養能力。

所以，教學三大具體目標(圖一)說明如下：

1. 三維建模的思維:

每個人都可由不同的視角去認識一個立體結構的物件，如何經由多方位的觀察與探索，再以平面數學的方程式、圖形、程序建構此立體圖，並力圖真實、全面、鮮明地反應這個立體圖，這就是立體圖思維的建模。對高中生而言，最常用的建模程序包括多邊形建模、曲線建模、參數建模，其所培養的數學力不僅使用了旋轉、鏡射、平移、伸縮等之混合、分析與組合，更在布林運算的邏輯思維上充分的活用。

2. 開放性的問題探究:

教案的探究內容，學生採自由選擇生活中立體物件作為思考模擬的對象，學生從他們自身立體思維的感知力為起點，多角度、多策略的觀察、模測、試驗、操作他們的猜想或建構，再經由科技輔助修正或透視所建置的3D 模型與真實的密切度，不管是建模中參數的校正或點線面的結構原理，都在開放性問題中讓數學公式從平面走向立體，立體思維能大大拓展學生的思路，把多種幾何物件有機地結合，取其特徵，相得益彰。

3. 利用行動載具將成果以 AR 展現:

課程中學生除了以數學軟體輔助實作的探究外，並與擴增實境 AR 的巧妙結合(例如，以 AR 展現成果+數學詩的創作、結合魚缸為 MR 場景展現成果)，為周遭生活增添許多展現數學的樂趣和機會。再回到本教案的設計初衷，它以生活中的物件作為探究內容，從起點到終點，可謂取之環境，饋之生活的創造力歷程。



圖一 教學目標

五、教育對象

普通高中 高一多元選修

六、課程設計 (方法與步驟)

(一)課程設計方法與架構

本課程的探究實作方法，乃以『問題-過程-推論-延伸』為整體程序，佐以教學目的之課程架構如下圖二：



圖二 教學方法與架構圖

問題：引導學生思考問題，從而激發他們的學習興趣和主動性。本課程中則是觀察實際生活的物件，引導學生在平面思維與立體思維間的轉換，培養出學生對問題的認識和理解。

過程：引導學生關注問題的解決過程，了解解決問題的步驟和方法。本課程則是利用數學軟體的操作、實驗、修正過程，讓學生組織解決過程中參數、角度、方位的影響，幫助他們理解問題和解決問題的方法。

推論：引導學生思考問題的本質和原因，從而形成自己的推論和判斷。一個立體物件的建構，每個學生均有他們自己觀察到的視角與特徵，教師可以引導學生進行分析、歸納、演繹等推理方式，培養學生的邏輯思維和判斷能力。

延伸：引導學生從已學知識出發，進一步探究問題背後的原理和應用，擴展學習的深度和廣度。本課程中，學生從最基本的平面幾何圖形、函數、多項式開始，透過實驗、模擬而建立空間中的立體曲面，延伸至選擇一個複雜、多面相組合的實際物件為探究的內容，最後將自由創意發揮與多元表現融入新興科技中展現成果，培養學生的綜合分析和創新能力。

(二)課程設計內容與實施

課程總共進行 2 週，每週 3 堂課。

模擬實驗工具: GeoGebra 軟體或 App 的平面/立體功能。

成果 AR 展示:(1)使用手機或平板的立體繪圖 App 之 AR 功能。

(2)EyeJack 網站製作 AR。

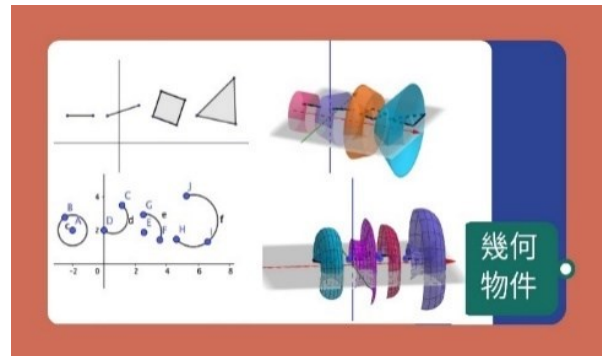
基本幾何物件的旋轉 (50 分鐘)

1.先實作/內容:

空間坐標軸的視角、建立 $xy/yz/xz$ 平面的方程式、繞 $x/y/z$ 軸旋轉的有向角、畫出平面上簡易的幾何圖形(圓、半圓、優弧、橢圓、線段、三角形、正方形、多邊形等)

2.再探究/內容:

- (1)觀察基本幾何圖形繞 x 軸旋轉 θ 角($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)的曲面特徵。
- (2)理解指令:Surface(<曲線>, <角度>, <線>)的意義。



設定範圍函數的旋轉 (50 分鐘)

1.先探究/內容:

學生觀察 5 個簡易函數的旋曲面特徵，去逆推、連連看他們在平面上所對應的函數:

$$\square f(x) = (x-1)^2 + 2, -1 \leq x \leq 3$$

$$\square g(x) = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3$$

$$\square h(x) = |x| + |x-1|, -1 \leq x \leq 2$$

$$\square f(x) = [x], 0 \leq x \leq 2$$

$$\square f(x) = \frac{1}{x}, 0 \leq x \leq 5$$

2.學生表現-1:

學生能粗略描述出函數的特性與旋轉曲面的特徵:

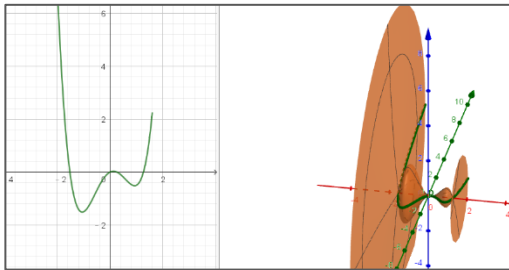
- 二次函數因為與 x 軸交於相異兩點，因此轉出來的曲面像糖果。
- 平方根函數會緩緩的遞增，所以像一個碗、花瓶等。
- 含絕對值的一次式，是折線圖，曲面像線軸、捆電線的軸。
- 高斯函數像階梯，旋轉後像圓型廣場的階梯座位。
- 倒數函數有無窮、逼近兩軸的特色，因此旋轉後會有像一個面與細管子。

3.最後實作/內容:

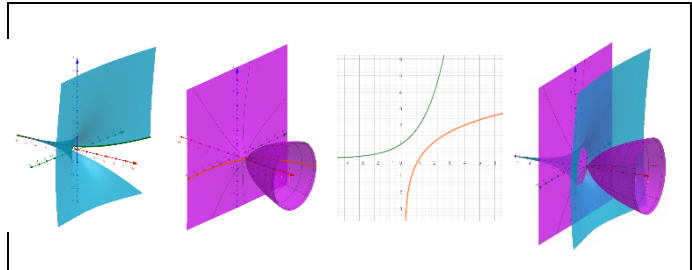
學生自行輸入這些函數並改變係數、改變項數、設定範圍，實作他們的旋轉曲面。

4.學生表現-2: 學生主動嘗試探究:

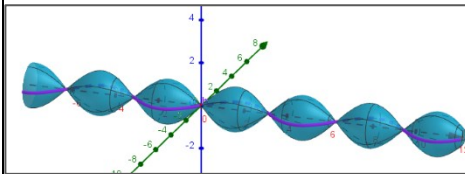
- (1)輸入 3 次、高次多項式發現旋轉曲面有更高的結構與自由度(如下圖三)。
- (2)平面上對 $x=y$ 成對稱的指對數，旋轉曲面的立體關係超乎想像(如下圖四)。
- (3)有週期性的三角函數、傅立葉級數的旋轉曲面是屬於較容易理解與想像(如下圖五、六)。



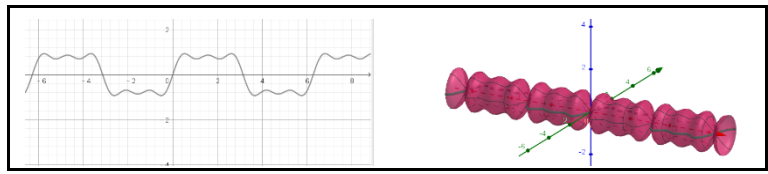
圖三 三多項式



圖四 指對數函數



圖五 正弦函數



圖六 三項的傅立葉級數

任意高次多項式的旋轉曲面/連續物件的旋轉 (50 分鐘)

1.先實作/內容:

- (1)建立三次多項式的特徵型態的數學概念: $f(x) = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$
- (2)利用點的集合與插值法建立任意多項式(如下圖七)。
- (3)伸縮、平移對方程式係數的影響(如下圖八)。
- (4)有序、有規則 pattern 的旋轉曲面(如下圖九)。

xy平面上
三次多項式函數

三次多項式函數

Step1: 輸入四個點 A(-1,1), B(2,4), C(3,3), D(6,2), 並成一個序列集合。
 Step2: 滿足四個點的最底次多項式函數: Polynomial(17)
 Step3: 取範圍: $y(-7 < x < 7)$, 函數
 Step4: 將取過範圍的多項式函數繞 z 軸產生旋轉曲面。
 Step5: 任意拉動 A,B,C,D, 觀察曲面的變化

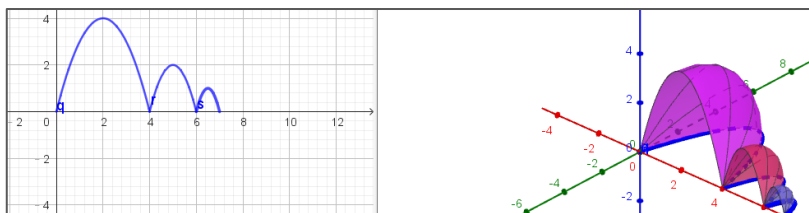
圖七 任意多項式的旋轉曲面

平面變換、伸縮、平移的運用

伸縮
平移

平移: Translate(物件, 向量)
 伸縮: Dilate(物件, 縮放倍率, 縮放中心)
 利用二次函數的平移+伸縮, 並繞 z 軸旋轉

圖八 伸縮 平移



圖九 有序 pattern

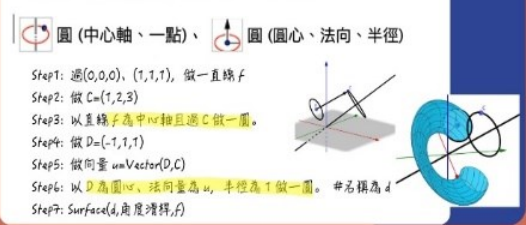
2.再探究/內容:

利用中心軸、法向量、半徑的元素，建立空間中任意的圓，並與空間中任意直線當成旋轉軸，建立圓的旋轉曲面。

空間中如何決定唯一的圓？

圓 (中心軸、一點)、圓 (圓心、法向、半徑)

Step1: 過(0,0,0), (1,1,1), 做一直線 f
Step2: 做 $C=(1,2,3)$
Step3: 以直線 f 為中心軸且過 C 做一圓。
Step4: 做 $D=(-1,1,1)$
Step5: 做向量 $uv=Vector(D,C)$
Step6: 以 D 為圓心、法向量為 uv 、半徑為 1 做一圓。 #名稱為 d
Step7: Surface(d ,角度滑桿, f)



發展活動/小組討論 (100 分鐘)

1.發展活動/內容:

- 評量 1: 建立側面類似階梯的花瓶，並改以 z 軸為旋轉軸。
- 評量 2: 利用之前課程建立的星星工具，從 xy 平面旋轉至 xz 平面，並繞 z 軸旋轉。
- 評量 3: 先建立頂點為原點的二次函數，再經適當的平移、鏡像、再平移後，再產生可打開圓形蓋子的物件。
- 評量 4: 利用描繪邊緣，產生自己臉部的魯賓杯。
- 評量 5: 經由查閱資料探究托里拆立利小號的方程式，並透過旋轉曲面觀察它「表面積無窮大但體積有限」的 3D 特徵樣貌。

評量 1

請繞 z 軸旋轉，產生一個側面類似有階梯、底面為圓的花瓶。



評量 2

完成星星圖形繞 z 軸的旋轉曲面



評量 3

從 $f(x)=x^2$ 開始，將其做適當的運算、平移，最後產生如下圖的旋轉曲面。



評量 4

魯賓盃 (Rubin vase) 分別觀察白色、黑色畫面所產生雙重意象。利用工具列的『手繪圖形』製造魯賓盃。



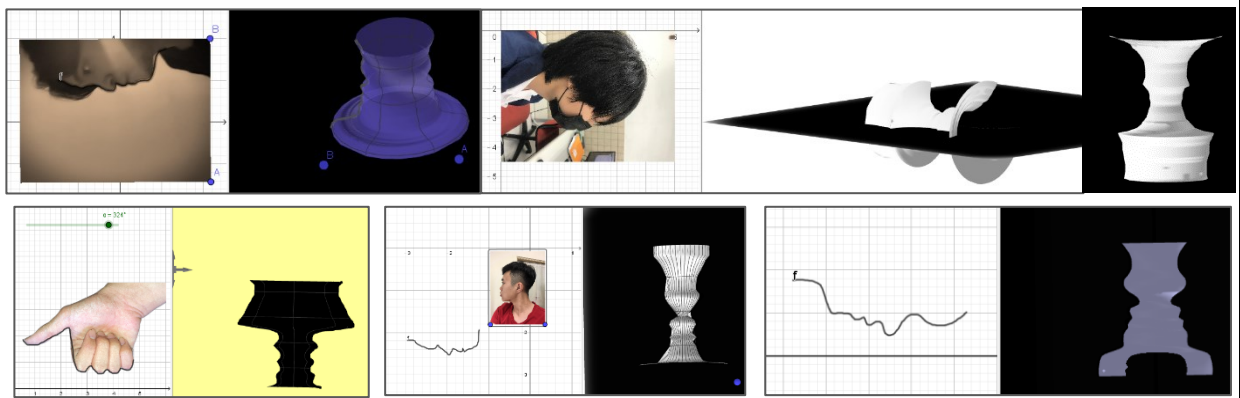
評量 5

托里拆利小號 (Torricelli's Trumpet) : 由義大利數學家埃萬傑利斯塔·托里拆利 (Evangelista Torricelli) 所發明的一個表面積無窮大但體積有限的三維形狀。此形狀又被稱為加百利號角 (Gabriel's Horn)。請你闡述它的相關資料，並利用旋轉曲面做出此 3D 物件。



2.學生表現/內容:

學生除了用自己的側臉製作魯賓杯以外，也發想用自己的手指握拳與其他手勢。(如下圖十)



圖十 各種設計的魯賓盃與發想

七、學習評量內容

學生成果發表(50 分鐘):

通過探究和實作後，學生可以深入理解數學的核心概念、原理和應用方法，學生從被動的知識接受者轉變為主動的知識建構者，評量成果展現以探討周遭實際場景與物件立體思維的旋轉曲面為主，並且利用新興科技 AR/MR 佐視覺化的3D 建模。(學生作品相關檔案連結在參考資料)

1. 以下圖 1~3 為學生觀察手邊的馬卡龍點，轉化成簡潔的橢圓與圓聯集後，再繞軸產生旋轉曲面。圖 4~5 為學生以他小時候的玩具車為探究內容，旋轉曲面一口氣帶動輪子與車蓋，車體與車燈即是伸縮平移的概念的運用。

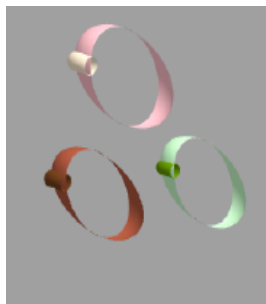


圖 1: 曲面旋轉 45 度



圖 2: 360 度完成

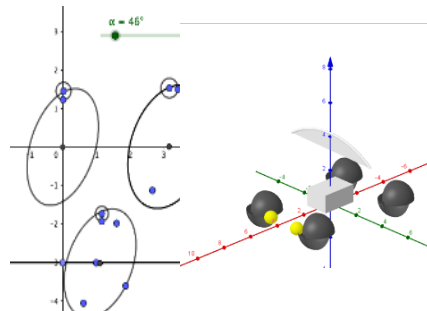


圖 3: 平面構

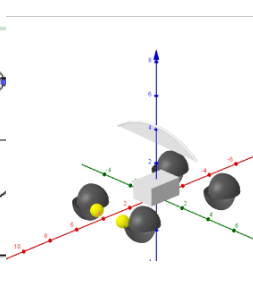


圖 4: 物件解

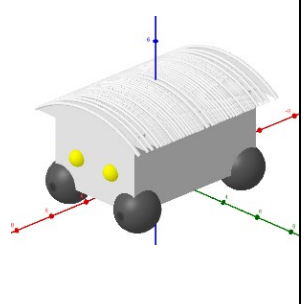
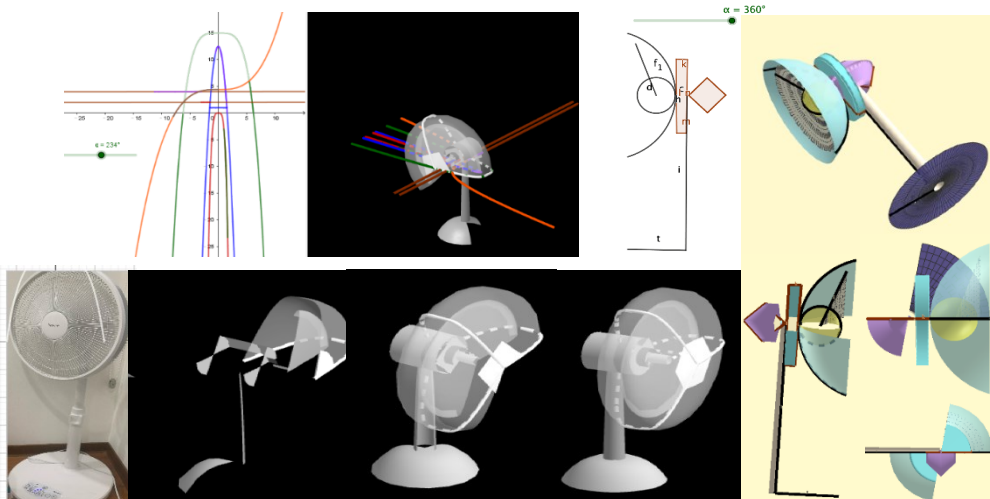
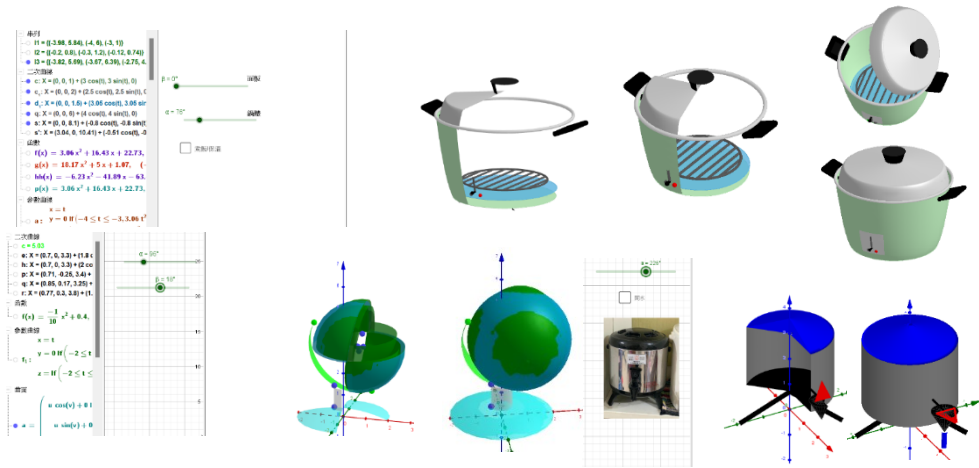


圖 5: 完成圖

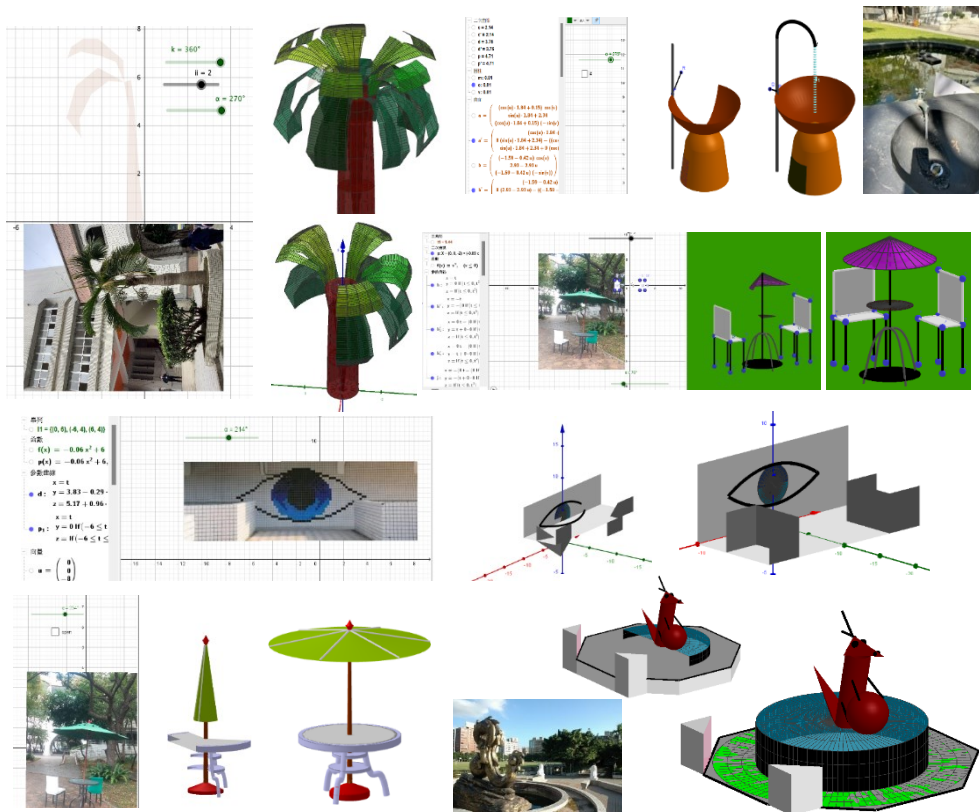
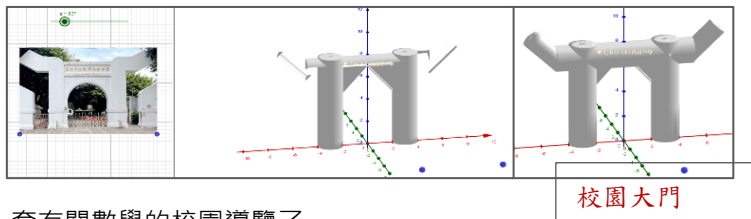
2. 下面兩位學生探究實境電風扇的立體思維方式完全不同，一位是以多項式結合條件範圍作旋轉，一位是利用幾何物件去建模，不僅體現自己解決問題的能力，在逼真、顏色的運用巧思上，更是發揮無比的創意。



3. 創造出家用電鍋、紅茶桶、地球儀的旋轉曲面，栩栩如生。



4. 校園的旋轉曲面 AR:創造校園內特色建築物、自然生態環境等之旋轉曲面，可以說校園的數學曲面步道，讓學生對校園的了解除了文化外，多了一層立體思維的識讀，加上 MR 技術，就是一套有關數學的校園導覽了。



參考資料：學生作品雲端連結與影片：<https://reurl.cc/eXDM9x>、<https://youtu.be/-NQHwLjyHZo>、
<https://reurl.cc/RvzeMe>、<https://reurl.cc/eXDM9x>、<https://youtu.be/-NQHwLjyHZo>