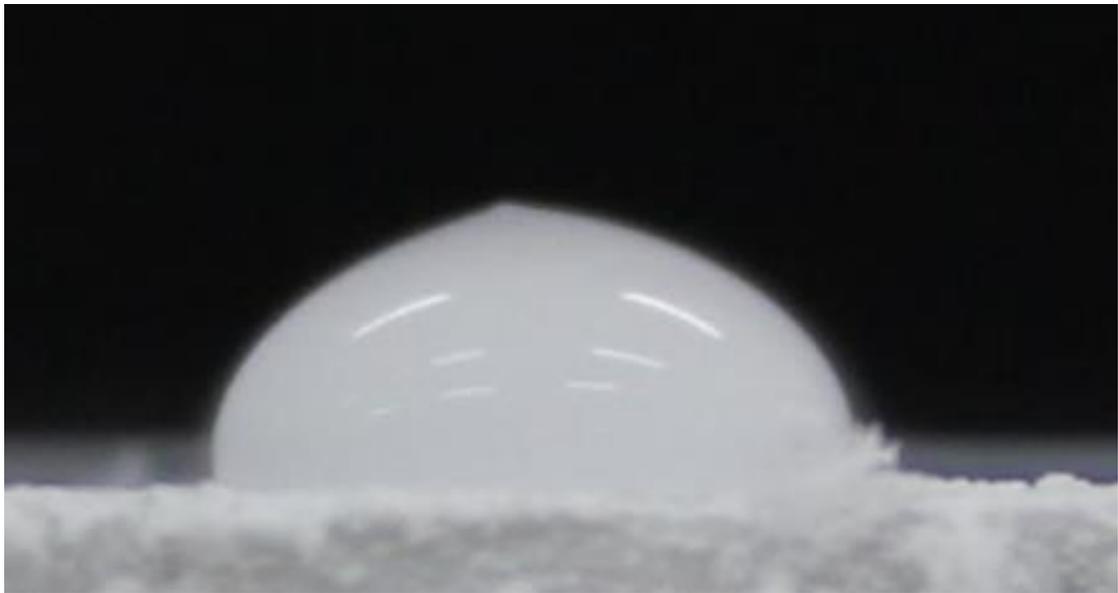


冰珠尖點的探討

我們的研究主要注重在小水珠結冰後，原本平滑的表面會突起形成尖點，也就是「冰尖凸」。我們試著分析這個現象的成因，以及凝固後形成的尖角大小和各變因間的關係。

研究動機

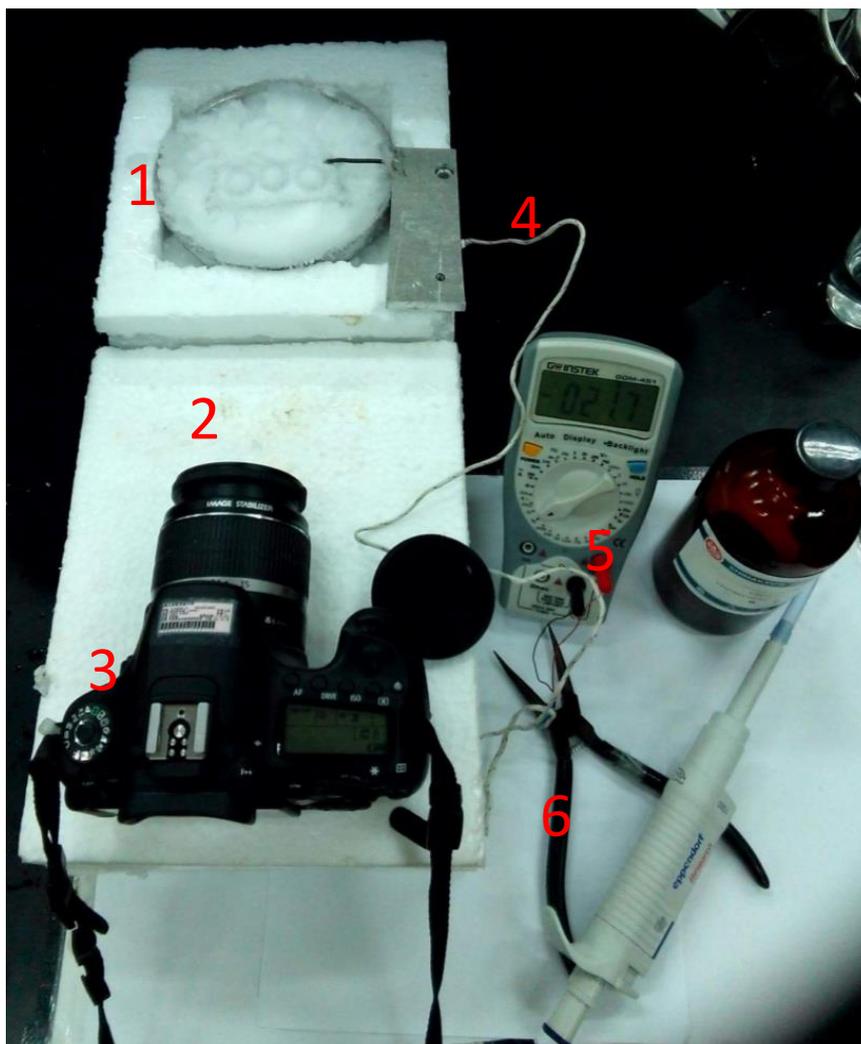
小時候我發現附著在冰箱冷凍室裡面的水滴，有時候會呈現圓圓尖尖的形狀(如下圖)，我感到很好奇，水滴結凍前本來是不存在尖尖的點的，這尖尖的點究竟是怎麼形成的呢？



研究器材

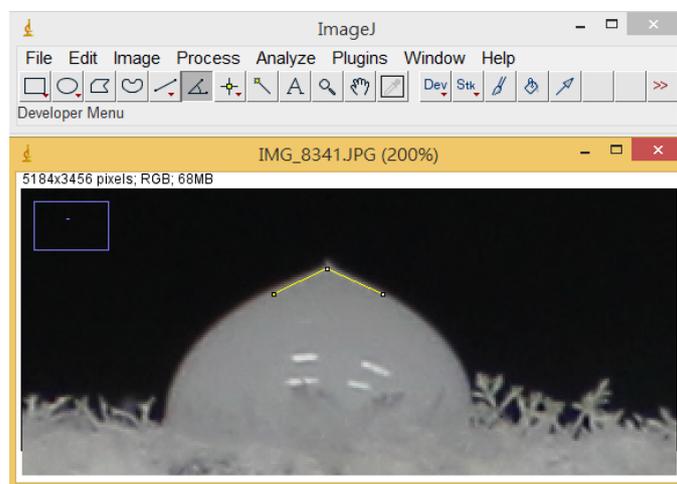
本實驗使用之器材如下圖：

- (1) 我們的自製降溫板，使用裝有甘油盤子，中間放入金屬塊，置入放有液態氮的保麗龍盒。
- (2) 自製的觀測台
- (3) 單眼相機
- (4) 黑布(用於方便拍攝)
- (5) 甘油
- (6) 微量定量滴管

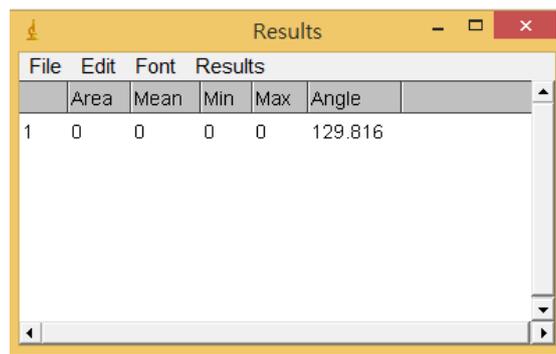


實驗分析軟體

得到照片後，我們可以用 ImageJ 這套軟體分析水滴頂角的大小。我們將照片放大到若干程度後，在水滴兩端以目測的方式選取（我們認為的）切點



ImageJ 就會自動計算角度的大小，我們就以此作為我們頂角的數據。



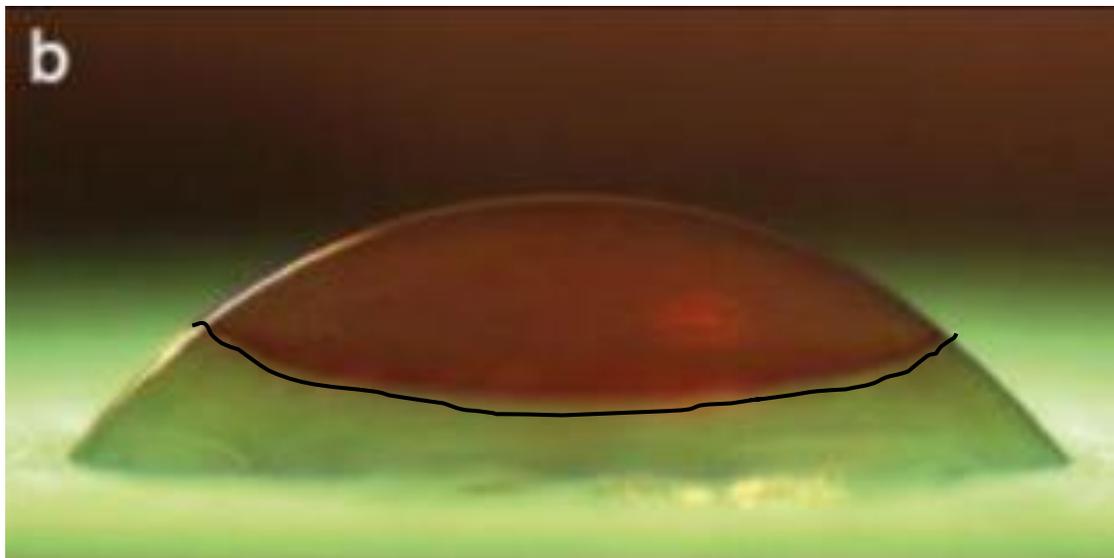
	Area	Mean	Min	Max	Angle
1	0	0	0	0	129.816

實驗模型分析

在進入正題以前，我們要先告訴大家我們對水滴各部分的名稱的定義。首先，我們定義同一時間所有結冰處的連線稱為「冰前」。而等到水滴結冰後，在水滴的上端會形成一個尖角，我們就定義它為「頂角」。同時，我們也定義結冰後的體積除上結冰前的體積，是水滴的「膨脹率」。又由於水的質量不變，所以我們又可以推得膨脹率和密度的關係。

在我們實驗的過程中，我們發現水珠的冰前是呈下凹狀的圓滑曲面(如下圖)，和我們參考文獻的敘述一致。黑線就是這顆水珠在某一時刻的冰前形狀。

在我們之後的分析中，我們假設冰前是一個球冠，就是球體表面的一部分，來簡化我們的模型。



接著，我們來分析體積小的水滴。在水滴體積很小時，因為受重力影響很小，參考之前研究者的文獻後，我們認為可以將水滴視為一個球缺。

所謂球缺，就是球體被一個平面截出來的形體。而因為球缺對其中心軸是對稱的，所以我們便可以任選一個剖面來觀察。在任何一個截面上，這個水滴呈現弓形。

在這個剖面上，設直線 P，Q 所繞成的平面為水滴一開始與金屬版的交界面，

而這個球缺相對應的曲率中心（即球心）為 O 。

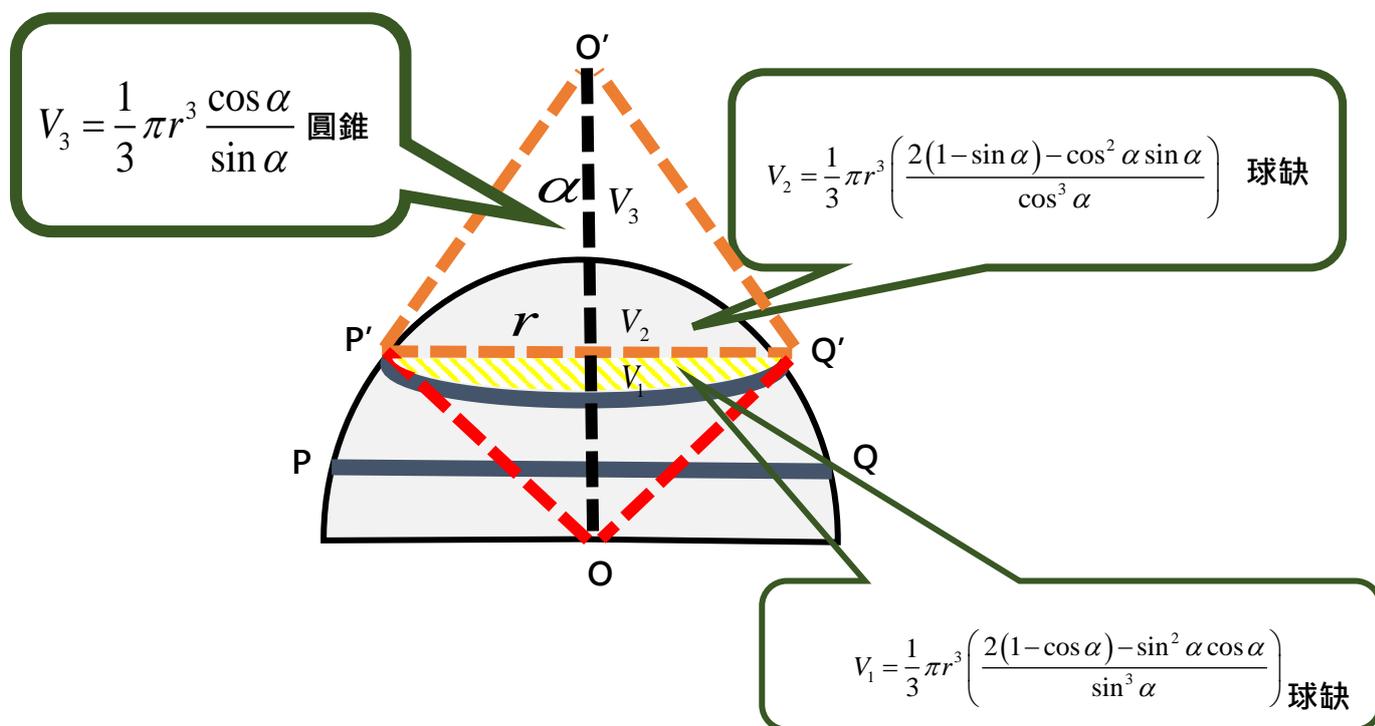
當水滴凝固後，它會形成一個尖點 O' ，而且與原本水滴的切點是 P' ， Q' ，其中，我們假設冰前就是以 O' 為球心， $OP' = OQ'$ 為半徑的球冠，就是剖面中的弧線 $P'Q'$ 。

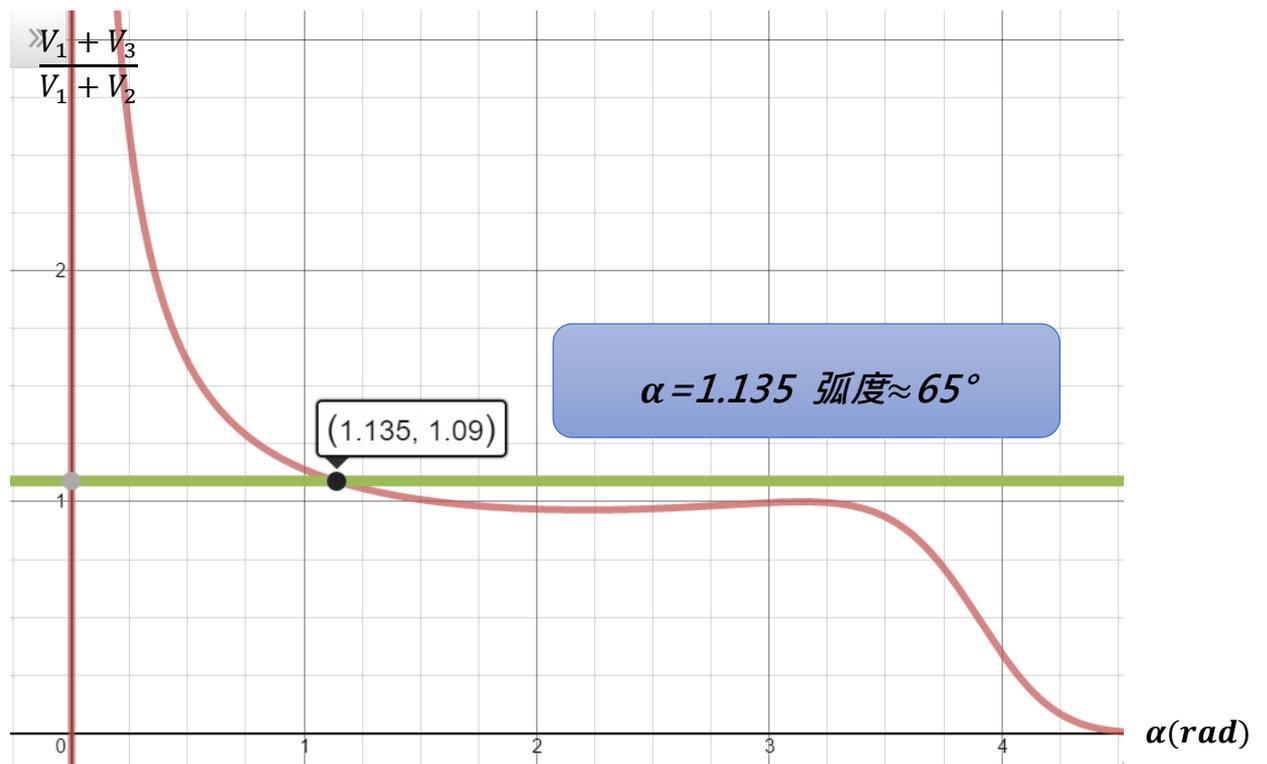
我們設水滴的半頂角為 α （按），而直線 $P'Q'$ 的長度為 $2r$ ，所以它的半長就是 r 。

接著，我們設直線 $P'Q'$ 所繞出的平面以下，冰前以上的水滴體積為 V_1 ，平面以上則為 V_2 。

V_1 和 V_2 是球缺，透過積分，我們可以得出它與 r 與 α 的關係。

而結冰之後，為便於計算，我們可以得到如圖中 $OP'Q'$ 繞一圈而成的圓錐體積 V_3 。



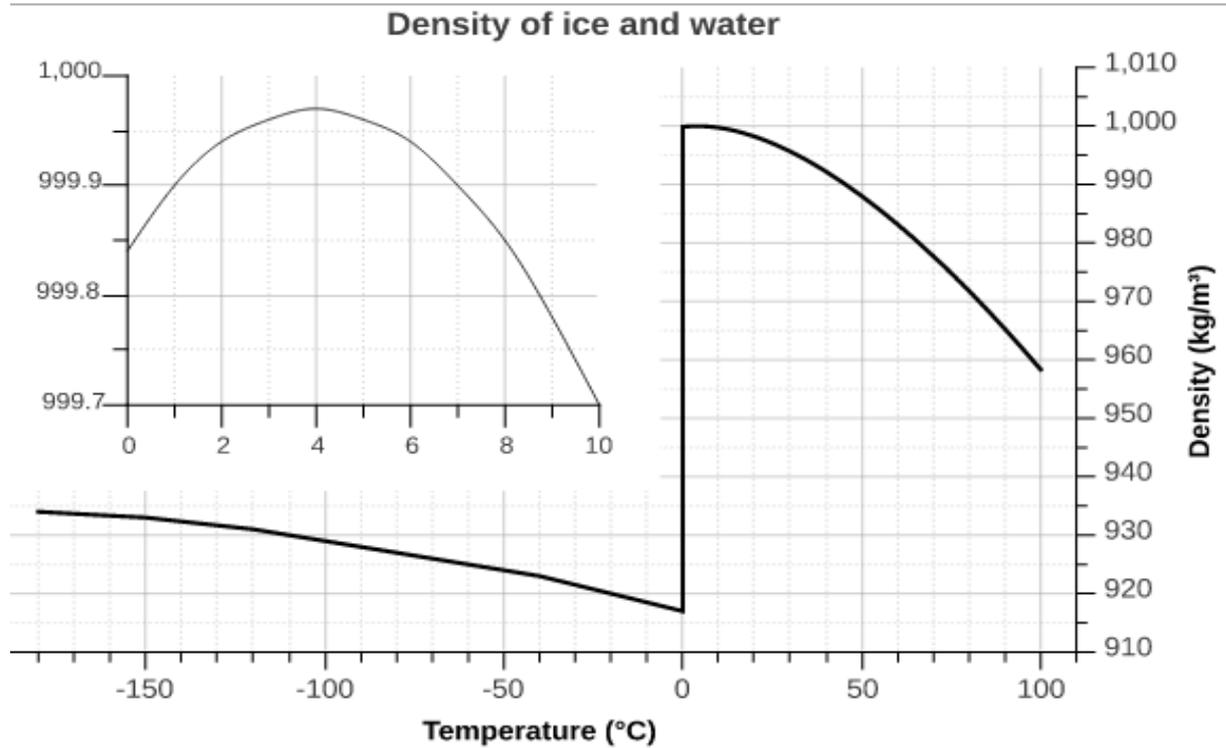


我們假設水滴由切點向上形成尖點這段時間，它的體積膨脹，是由水與冰之密度差異所造成。因此我們代入實驗時水滴初溫、末溫所對應的密度，可算出水的膨脹率約為 1.09，令其等於剛剛結冰後和結冰前的體積相除。即可得到這個關係式。

因為剛才我們求出 V_1 ， V_2 ， V_3 與半頂角 α 的關係，我們便可以用此關係式，將膨脹率對 α 作圖。

其中，圖的橫軸為半頂角 α ，單位是弧度，縱軸是體積膨脹率。

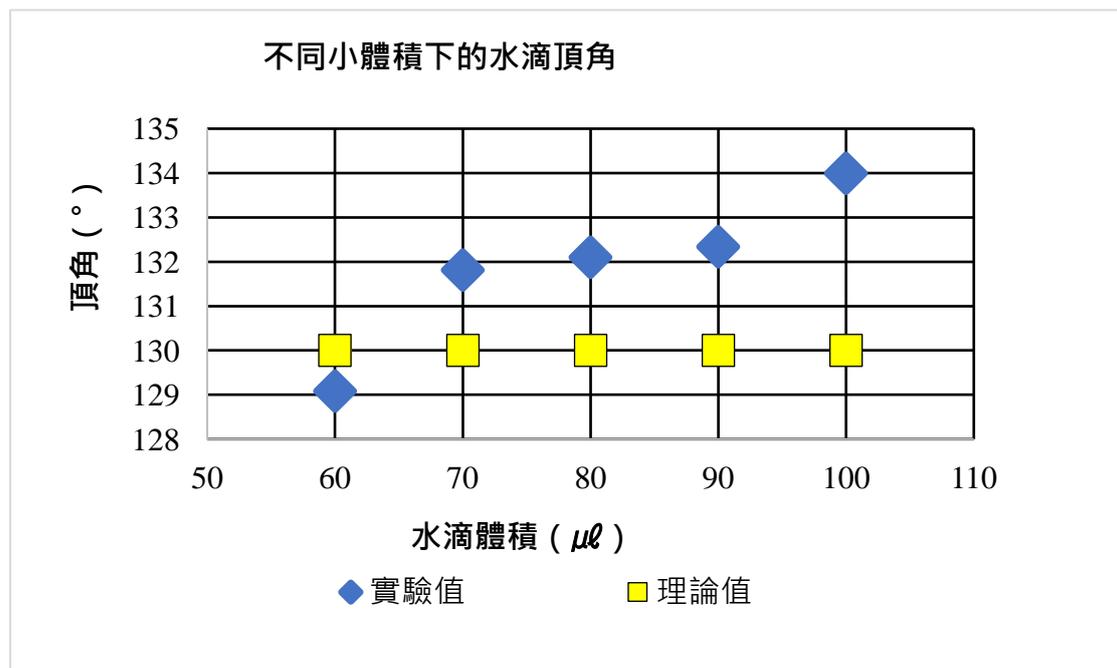
畫一條水平線代表體積膨脹率是 1.09 的地方，我們發現它與這條理論曲線交於 $\alpha = 1.135$ 弧度的地方，換算之後可得半頂角約為 65 度，頂角約為 130 度。



在 0 度 C 以上時，水滴先縮後脹，在 0 度 C 時，也就是我們形成冰前的溫度，決定了我們水滴頂角的形狀，最後，在 0 度 C 以下，已經定型的水滴緩慢冷縮，進而影響尖度大小。

實驗數據

我們將相同體積水滴照片取十組，去頭去尾取平均得到以下數據。



結論

我們假設水滴頂角的產生全部來自體積的變化，因此若能算出結冰前後的體積與頂角的關係式，再由密度的差異推算膨脹率，即可求出頂角。在體積極小時，可將水滴視為一圓球，結冰後之尖角視為一圓錐，解得其頂角約為 130° ；

參考資料

- Freezing Droplets (2000, August 22). Russia: Vitalii Matyunin ,Vyacheslav Chernov, Roman Doronin, Pavel Yanko Retrieved September 2, 2015, from <http://goo.gl/KiwPON>
- Snoeijer, J. H., & Brunet, P. (2012). Pointy ice-drops: How water freezes into a singular shape. *Am. J. Phys. American Journal of Physics*, 80(9), 764.
- Anderson, D., Worster, M., & Davis, S. (1996). The case for a dynamic contact angle in containerless solidification. *Journal of Crystal Growth*, 163(3), 329-338.
- Water (data_page). (n.d.). Retrieved March 16, 2016, from [https://en.wikipedia.org/wiki/Water_\(data_page\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Water_(data_page))